

Tradīcijas un inovācijas Baltijas un Ziemeļvalstu matemātikas izglītībā: metodiskie ieteikumi augstākās matemātikas mācīšanās



Par izdevumu

Izdevums ir sagatavots projekta “Tradīcijas un inovācijas Baltijas un Ziemeļvalstu matemātikas izglītībā / 2025” ietvaros (projekta Nr. NPHE-2025/10040), ko finansē Nordplus augstākās izglītības apakšprogramma.

Autori:

Liene Briede (Daugavpils Universitāte, Latvija)

Elga Drelinga (Daugavpils Universitāte, Latvija)

Anete Šenfelde (Daugavpils Universitāte, Latvija)

Leif Hammar (Ålandu Lietišķo zinātņu universitāte, Ålandu salas, Somija)

Oksana Labanova (TTK Lietišķo zinātņu universitāte, Igaunija)

Elena Safiulina (TTK Lietišķo zinātņu universitāte, Igaunija)

Recenzents:

Artjoms Pučinskis

Izdevējs: Daugavpils Universitāte

ISBN 978-9934-39-059-3

Saturs

Ievads	4
Izstrādātā matemātikas uzdevumu krājuma struktūra	6
Izziņā balstīta mācīšanās un matemātikas apguve	8
Trīs līmeņu izziņas modelis.....	9
Izziņā balstītas mācīšanās cikls	11
Izziņā balstītas mācīšanās līmeņi	12
Saistība ar ikdienas dzīvi.....	16
Pētījumos balstīti pierādījumi: matemātikas prasmju nozīme darba tirgū	22
Ilgspējīga matemātikas izglītība.....	23
Izmantotā literatūra.....	26

Ievads

Eiropas Savienība šobrīd saskaras ar kvalificētu speciālistu trūkumu STEM jomās (dabaszinātnes, tehnoloģijas, inženierzinātnes un matemātika). Viena no problēmām, kas ietekmē šo situāciju, ir studiju satura un mācību materiālu neatbilstība mūsdienu prasībām. Matemātikas mācību materiāli augstākajā izglītībā nereti saglabā izteikti teorētisku ievirzi, to saturs netiek atjaunots pietiekami regulāri, un tajos ne vienmēr pietiekami ir integrēts matemātikas lietojums profesionālajā un starpdisciplinārajā kontekstā. Tādējādi studiju saturs kļūst fragmentēts un mazāk saistīts ar reālajām darba tirgus prasībām, kā arī ar inženierzinātņu un dabaszinātņu profesijām nepieciešamajām praktiskajām kompetencēm (Song, 2014)¹.

Projekts “Tradīcijas un inovācijas Baltijas un Ziemeļvalstu matemātikas izglītībā / 2025” tiek īstenots ar mērķi uzlabot STEM izglītības kvalitāti visās partnervalstīs, t.i. Latvijā, Igaunijā un Ālandu salās (Somijā), kuras raksturo salīdzinoši līdzīgs iedzīvotāju skaits, kopīgas reģionālās attīstības iezīmes un līdzīga izglītības sistēmu attīstības pieredze. Pamatojoties uz šo kopīgo kontekstu, projekts rada stabilu pamatu risinājumu izstrādei matemātisko prasmju pilnveidei augstākajā izglītībā visās iesaistītajās partnervalstīs. Analizējot pieejamos statistikas datus, tika secināts, ka Somijā ir visaugstākais studentu īpatsvars, kuri uzsāk studijas STEM jomās (35,3 %) savukārt Latvijā - viszemākais (25,1 %). (European Commission 2026²; European Commission 2023a³) 2022. gadā Latvijā STEM jomās absolvēja tikai 19,7 % studentu, kas ir viens no zemākajiem rādītājiem Eiropas Savienībā, kur vidējais rādītājs sasniedz 26,6 %. Šie rādītāji parāda, cik svarīgi ir uzlabot STEM jomu priekšmetu mācīšanas kvalitāti, it īpaši matemātiku, padarot tos saistošus studentiem (Institute of Economics of the Latvian Academy of Sciences [IE LVA], 2025)⁴.

Pētījumi liecina, ka matemātikas apguve augstākajā izglītībā joprojām bieži ir izteikti procesuāla un nepietiekami orientēta uz matemātikas praktisku lietojumu. Tā vietā, lai studenti padziļināti izprastu matemātiskos jēdzienus, saskatītu to kopsakarības ar reālās dzīves problēmām un attīstītu radošu pieeju matemātikas izmantošanai, mācību process nereti tiek reducēts uz algoritmisku darbību apguvi un uzdevumu risināšanu atbilstoši eksāmenu prasībām (Ichsan et al., 2024)⁵.

Projekta mērķis un uzdevumi

Projekta “Tradīcijas un inovācijas Baltijas un Ziemeļvalstu matemātikas izglītībā / 2025” mērķis ir stiprināt saikni starp teorētisko matemātikas apguvi un tās praktisko pielietojumu, veicinot matemātikas sasaisti ar reālās dzīves problēmām un aktualizējot mācību materiālus.

Projekta uzdevumi ir:

- Izstrādāt inovatīvus mācību materiālus augstākās matemātikas apguvei;
- Veicināt mūsdienīgu matemātikas mācīšanas metožu izmantošanu augstākajā izglītībā;

¹ Song, Y., & Kong, S. C. (2014). Going beyond textbooks: A study on seamless science inquiry in an upper primary class. *Educational Media International*, 51(3), 226–236. <https://doi.org/10.1080/09523987.2014.968450>

² European Commission. (2026, March 20). *Boosting STEM participation in tertiary education: a persistent challenge*. Education Chart of the Month. Directorate-General for Education, Youth, Sport and Culture. <https://education.ec.europa.eu/resources-and-tools/data-and-analysis-on-education-and-skills/key-trends-in-education/stem-in-tertiary-education>

³ European Commission. (2025a). *Education and training monitor 2025: Country report: Latvia*. Publications Office of the European Union. <https://op.europa.eu/webpub/eac/education-and-training-monitor/en/country-reports/latvia.html>

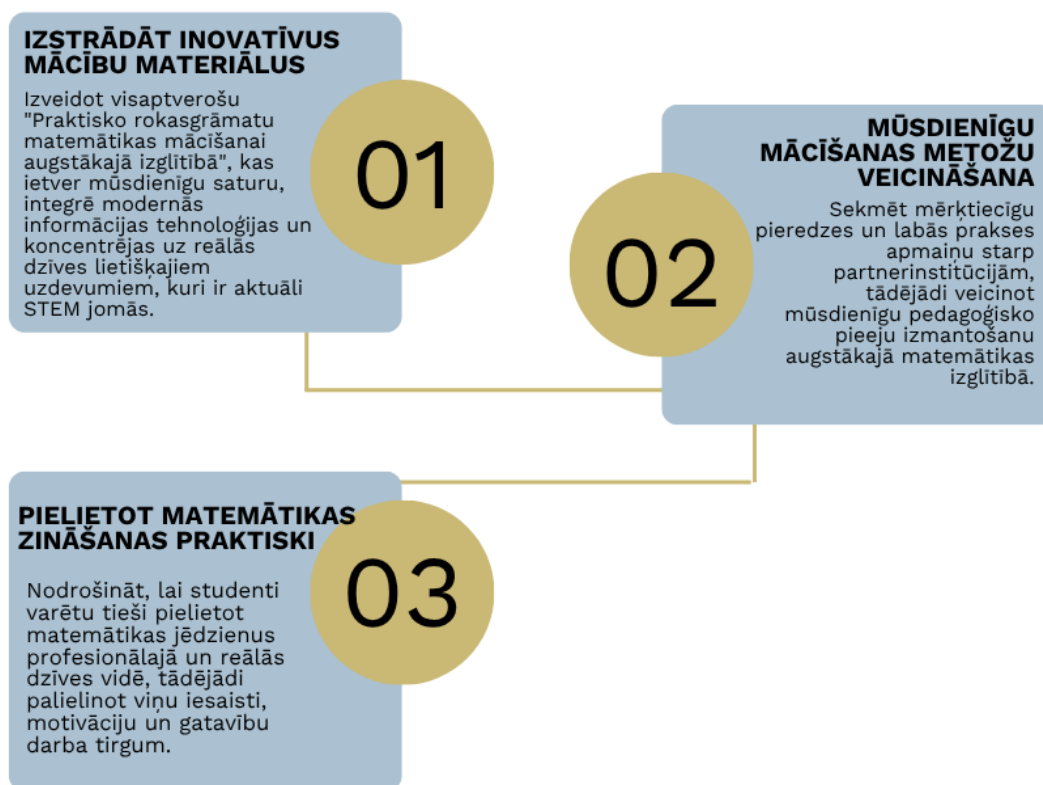
⁴ Institute of Economics of the Latvian Academy of Sciences. (2025, September 24). *Latvia monthly briefing: STEM youth development drives fintech growth: Latvia case study*. China-CEE Institute. <https://china-cee.eu/2025/09/24/latvia-monthly-briefing-stem-youth-development-drives-fintech-growth-latvia-case-study/>

⁵ Ichsan, I., Mulyati, M., Duma, S. Y., & Nirfayanti, N. (2024). The effectiveness of mathematics learning with the STEAM approach in improving students' critical thinking skills. *Aksioma Education Journal*, 1(3), 1–16. <https://doi.org/10.62872/kdepgn33>

- Attīstīt studentu prasmi pielietot matemātikas zināšanas reālās dzīves situācijās un profesionālajā vidē;
- Sekmēt mērķtiecīgu pieredzes un labās prakses apmaiņu starp partnerinstitūcijām.

1.attēls

Trīs pamatprincipi projekta mērķa sasniegšanai



Sagaidāms, ka projekta īstenošana sekmēs mācīšanas kvalitātes pilnveidi, studentu motivācijas un sekmju uzlabošanu, kā arī mācībspēku profesionālās labbūtības stiprināšanu, samazinot laika patēriņu nodarbību materiālu sagatavošanai. Vienlaikus tiks veicināta mūsdienīga, uz praktisko pielietojumu orientēta matemātikas apguve, kas balstīta integrētos un padziļināti izstrādātos mācību materiālos. Projekta rezultātā ir izstrādāts metodisko ieteikumu kopums pasniedzējiem, kurā būs apkopoti metodiskie risinājumi un praktiski ieteikumi izstrādātās uzdevumu grāmatas izmantošanai studiju procesā, tādējādi sniedzot atbalstu augstākās matemātikas pasniegšanā un veicinot efektīvāku augstākās matemātikas apguves īstenošanu.

Šie metodiskie ieteikumi ir paredzēti augstākās izglītības mācībspēkiem, kuri pasniedz matemātiku universitātēs un lietišķo zinātņu augstskolās. Šī mērķgrupa gūs tiešu labumu no projekta rezultātiem, tostarp no inovatīviem mācību materiāliem un uzdevumiem, kas balstīti reālās dzīves situācijās un matemātikas praktiskajā pielietojumā. Otra būtiska labuma guvēju grupa ir STEM jomu studenti, kuri iegūs piekļuvi saistošākai, mūsdienīgākai un ar profesionālo praksi ciešāk saistītai matemātikas apguvei. Par nozīmīgu mērķgrupu uzskatāmi arī ārvalstu studenti, jo mācību materiāli sākotnēji tiks izstrādāti angļu valodā, tādējādi nodrošinot to pieejamību plašākam starptautisko studentu lokam.

Izstrādātā matemātikas uzdevumu krājuma struktūra

Projektā “Tradīcijas un inovācijas Baltijas un Ziemeļvalstu matemātikas izglītībā/ 2025” ietvaros tika izstrādāti mācību uzdevumi par divām svarīgām tēmām vektoriem un lineāro algebru. Lineārā algebra ir pamats daudzām matemātikas nozarēm un tiek plaši pielietota dažādās disciplīnās, tostarp fizikā, inženierzinātnēs, datorzinātnēs, ekonomikā un statistikā (Pimpalkar & Karoo, 2024)⁶, kā arī vektoru, jo tas ir matemātikas pamatjēdziens, kam ir plašs pielietojums dažādās jomās (Gonzalez, 2023)⁷.

Abas tēmas tika izvēlētas tāpēc, ka vektoriem un lineārajai algebrai ir svarīga nozīme STEM izglītībā, jo tas ir pamats, uz kura balstās daudzas citas matemātikas un dabaszinātņu disciplīnas. To apguve ir būtiska studentu panākumiem gan akadēmiskajā vidē, gan darba vidē (Dorier & Maaß, 2020)¹⁰. Neaizmirstot, ka lineārās algebras un vektoru metodes izceļas ar plašu pielietojumu – tās tiek izmantotas visdažādākajās jomās, sākot no inženierzinātnēm un datorzinātnēm līdz pat ekonomikai un sociālajām zinātnēm (Pimpalkar & Karoo, 2024⁶; Gonzalez, 2023⁷). Šīs tēmas atbilst mūsdienu darba tirgus prasībām, jo datu analīze, modelēšana un kvantitatīvā domāšana ir cieši saistītas ar lineārās algebras un vektoru izpratni (OECD, 2024a⁸; Meehan, Pacheco, & Schober, 2023²²). Zināms, ka darbs ar vektoriem un matricām veicina domāšanu un spēju risināt kompleksas problēmas, kas ir būtiskas STEM jomā strādājošajiem. Mainoties pasaulei lineārās algebras principi cieši sasaistās ar mūsdienu tehnoloģijām – tādas jomas kā mākslīgais intelekts, mašīnmācīšanās un datu zinātne balstās uz lineārās algebras pamatprincipiem (Pimpalkar & Karoo, 2024⁶).

Uzdevumu krājums strukturēts trīs galvenajās sadaļās.

Pirmajā daļā ietverta teorija, kurā sniegti matemātisko jēdzienu skaidrojumi ar ilustrācijām. Teorētiskā daļa aptver svarīgāko matemātikas jēdzienu skaidrojumus, kas nepieciešami turpmākajam darbam ar praktiskajiem uzdevumiem.

Otrajā daļā ietverti uzdevumi dažādos grūtības līmeņos, kas veidoti kā progresīvi vingrinājumi – no pamata līmeņa līdz padziļinātiem un pētnieciskiem uzdevumiem. Uzdevumi strukturēti atbilstoši trīs izpētē balstītās mācīšanās (IBL) līmeņiem – strukturētā, vadītā un atvērtā pētniecība, kas ļauj pasniedzējiem izvēlēties atbilstošāko pieeju atkarībā no studentu sagatavotības un mācību mērķiem.

Trešajā daļā iekļauti praktiskie matemātikas pielietojuma uzdevumi, kas demonstrē matemātisko zināšanu izmantošanu reālās dzīves un profesionālajās situācijās. Šie uzdevumi aptver tādas jomas kā uzņēmējdarbība un ražošana, elektrisko ķēžu analīze, ražošanas plānošana, datorgrafika, attēlu apstrāde un būvkonstrukciju analīze. Praktiskie uzdevumi veidoti tā, lai studenti ne tikai apgūtu matemātiskās metodes, bet arī attīstītu prasmi tās pielietot nestandarta situācijās un pieņemt uz datiem balstītus lēmumus.

⁶ Pimpalkar, A., & Karoo, K. (2024). Exploring the applications and advancements in linear algebra: A comprehensive review. *International Journal of All Research Education and Scientific Methods*, 12(7), 1087–1089. <https://doi.org/10.13140/RG.2.2.14341.82409>

⁷ Gonzalez, J. J. M. (2023). The power of vectors: Understanding their application and importance. *Research & Reviews: Journal of Statistics and Mathematical Sciences*, 9(4), 007. <https://www.rroij.com/open-access/the-power-of-vectors-understanding-their-application-and-importance.php?aid=94049>

⁸ OECD. (2024b). *Mathematics for life and work*. OECD Publishing. https://www.oecd.org/en/publications/2024/11/mathematics-for-life-and-work_a951fc0a/full-report/component-4.html

1. tabula

Izstrādātā matemātikas uzdevumu krājuma struktūra

	Apraksts
Teorija	Skaidri matemātikas jēdzienu skaidrojumui, kas papildināti ar uzskates līdzekļiem.
Dažādas grūtības pakāpes uzdevumi	Pakāpeniskums – no pamatlīmeņa līdz sarežģītiem (padziļinātiem) uzdevumiem.
Praktiskais pielietojums	Reālās dzīves problēmu uzdevumi no dažādām profesionālajām jomām

Vektoru praktiskais pielietojums

Vektori ir neaizvietojsams matemātiskais instruments fizikālo procesu un inženiersistēmu analīzei, kas ļauj aprakstīt lielumus, kuriem piemīt gan skaitliskā vērtība (modulis), gan virziens. Vektoru analīzi plaši pielieto šādās jomās:

- fizika un inženierzinātnes;
- robotika un mehānika;
- navigācija un GPS;
- datortehnoloģijas un datorgrafika;
- citas zinātnes un tehnoloģiju jomas.

Lineārās algebras pielietojums

Lineārā algebra ir neaizvietojsams matemātiskais instruments daudzu zinātnes un tehnoloģiju jomu pamatā, kas ļauj modelēt un risināt problēmas ar vairākiem mainīgajiem, izmantojot matricas un vektoru telpas. Lineāro algebru plaši pielieto šādās jomās:

- uzņēmējdarbība un ražošana;
- ķēžu analīze (elektroķēžu/shēmu analīze);
- ražošanas plānošana;
- ražošanas izmaksu analīze;
- datorgrafika;
- attēlu apstrāde.

Aplūkotie piemēri parāda, ka vektori un lineārā algebra nav tikai teorētiski matemātikas jēdzieni, bet gan praktiski rīki dažādu reālu problēmu risināšanā. Tie palīdz aprakstīt kustību, spēkus, attēlus, datus un citus procesus, ar kuriem sastopas gan inženierzinātnēs, gan tehnoloģijās, gan ikdienas lietojumos. Tāpēc šo tematu apguve palīdz studentiem labāk izprast matemātikas nozīmi un saskatīt tās saikni ar nākamo profesionālo darbību.

Izziņā balstīta mācīšanās un matemātikas apguve

Mūsdienu sabiedrības straujā attīstība, tehnoloģiju progress un darba tirgus pārmaiņas arvien vairāk palielina pieprasījumu pēc speciālistiem STEM jomās. Tādēļ izglītībā būtiska nozīme tiek piešķirta dabaszinātņu un eksakto zinātņu apguvei, veicinot skolēnu un studentu interesi par šīm nozarēm un attīstot prasmes, kas nepieciešamas turpmākajai profesionālajai darbībai (European Commission, 2022)⁹. Šajā kontekstā nozīmīga ir izziņā balstīta mācīšanās, kas tiek uzskatīta par vienu no efektīvākajām pieejām pētniecisko prasmju attīstīšanai un dziļākas izpratnes veidošanai dabaszinātņu un matemātikas apguvē (Rocard, 2007)¹⁰.

Izziņā balstīta mācīšanās (IBM) ir mācību pieeja, kurā studenti nevis pasīvi iegaumē faktus, bet aktīvi izmanto zinātniskās izziņas metodes. Šajā pieejā zināšanas tiek iegūtas un problēmas risinātas, praktiski pētot, formulējot jautājumus un apmainoties ar idejām. Vienlaikus mainās arī pasniedzēja loma – no tiešu instrukciju sniedzēja viņš kļūst par studentu mācīšanās procesa atbalstītāju un virzītāju (Sokołowska, 2020¹¹; sk. 2. attēlu).

2.attēls

Izziņā balstītas mācīšanās skaidrojums

Izziņā balstīta mācīšanās (IBM) ir aktīva un praktiska mācību pieeja, kurā studenti zināšanas apgūst, izmantojot zinātniskās izziņas metodes, lai pētītu jautājumus un risinātu problēmas. Atšķirībā no tradicionālas pieejas, kas balstīta uz faktu pasīvu apguvi, izziņā balstītā mācīšanās paredz, ka studenti paši atklāj zināšanas, formulē jautājumus, analizē informāciju un meklē risinājumus. Savukārt skolotāja loma šajā procesā mainās — skolotājs vairs nav tikai tiešs zināšanu sniedzējs, bet kļūst par studentu mācīšanās procesa atbalstītāju un virzītāju.

Izziņā balstīta matemātikas mācīšanās ir uz studentu orientēta pieeja matemātikas apguvei, kas rosina studentus izmantot darba metodes, kuras ir salīdzināmas ar matemātiķu un zinātnieku darbības principiem. Šajā pieejā studenti tiek mudināti (Dorier & Maab, 2020)¹²:

- novērot parādības un uzdot pētnieciskus jautājumus;
- meklēt matemātiskus un zinātniskus veidus, kā uz šiem jautājumiem atbildēt;
- veikt eksperimentus un sistemātiski kontrolēt mainīgos lielumus;
- izstrādāt diagrammas, veikt aprēķinus, meklēt likumsakarības un savstarpējās saistības;

⁹ European Commission. (2022, January 18). *Communication from the Commission to the European Parliament, the Council, the European Economic and Social Committee and the Committee of the Regions on a European strategy for universities* (COM/2022/16 final). EUR-Lex. <https://eur-lex.europa.eu/legal-content/EN/TXT/?uri=celex:52022DC0016>

¹⁰ Rocard, M. (2007). *Science education now: A renewed pedagogy for the future of Europe*. Office for Official Publications of the European Communities. http://ec.europa.eu/research/science-society/document_library/pdf_06/report-rocard-on-science-education_en.pdf

¹¹ Sokołowska, D. (Ed.). (2020). *Inquiry based learning to enhance teaching: Theory, tools and examples*. University of Ljubljana, Faculty of Education. https://ec.europa.eu/programmes/erasmus-plus/project-result-content/cf1a25b1-14ed-4c62-81db-1d4754bb0725/3D_VOLUME1.pdf

¹² Dorier, J.-L., & Maaß, K. (2020). Inquiry-based mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (2nd ed., pp. 384–388). Springer Verlag.

- izvirzīt pieņēmumus (hipotēzes) un veikt vispārinājumus;
- interpretēt un kritiski izvērtēt savus risinājumus;
- efektīvi prezentēt un argumentēti apspriest savus rezultātus ar citiem.

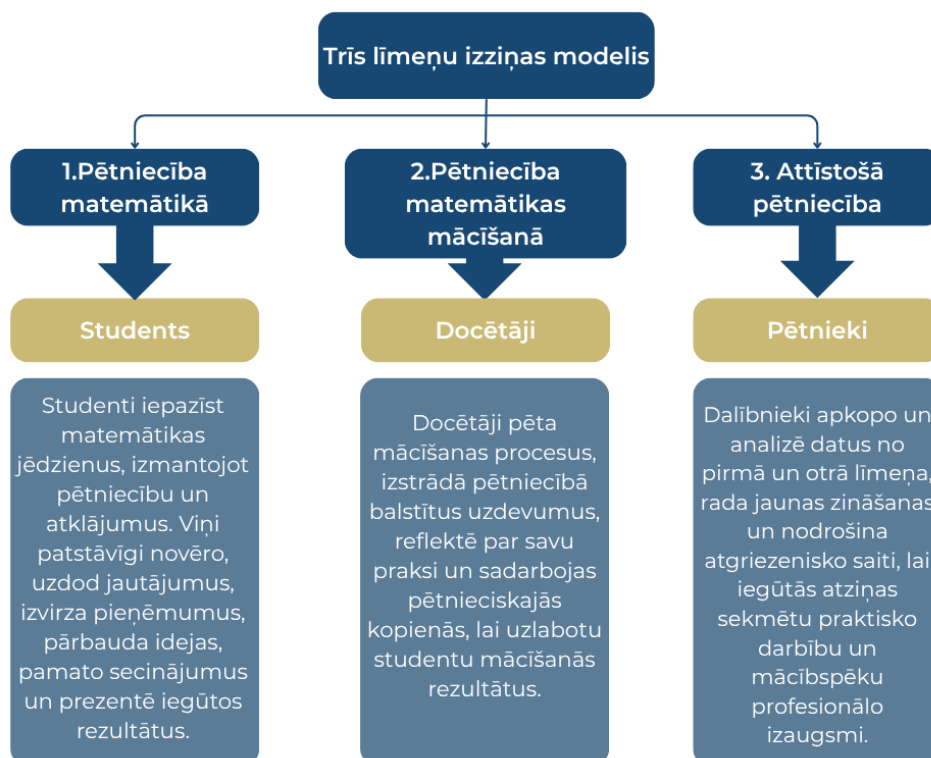
Atšķirībā no tradicionālās pieejas, kur mācīšanās bieži balstās uz gatavu noteikumu un algoritmu apguvi, izziņā balstīta matemātikas mācīšanās paredz studentu aktīvu iesaisti zināšanu konstruēšanā. Šādā mācību procesā studenti nevis mehāniski piemēro standartizētas darbības, bet pēta matemātiskus jēdzienus un procesus, analizē problēmas, meklē risinājumus un formulē atbildes uz atvērtā tipa jautājumiem. Tādējādi tiek veicināta dziļāka izpratne par apgūstamo saturu, attīstīta spēja patstāvīgi domāt un stiprināta studentu līdzdalība matemātikas satura apgūvē.

Trīs līmeņu izziņas modelis

Izziņā balstītas matemātikas mācīšanās pieejas daudzslāņaino raksturu atklāj trīs līmeņu modelis, kas piedāvā teorētisku ietvaru dažādu, savstarpēji saistītu izziņā balstītas matemātikas apguves līmeņu izpratnei. Šis modelis parāda, ka izziņas process neaprobežojas tikai ar studentu darbību, bet tajā aktīvi iesaistās arī pasniedzēji un pētnieki. Visi trīs līmeņi ir cieši saistīti un savstarpēji papildina cits citu, tādējādi apliecinot, ka izziņā balstīta pieeja matemātikas izglītībā ir daudzdimensionāls un sadarbībā balstīts process (Rogovchenko et al., 2021).¹³

3.attēls

Trīs līmeņu izziņas modelis



¹³ Rogovchenko, S., Rogovchenko, Y., & Tretyakova, O. (2021). Inquiry-based tasks with modeling and conceptual questions. In I. M. Gómez-Chacón, R. Hochmuth, S. Rogovchenko, & N. Brouwer (Eds.), *Mathematics for higher education: INDRUM 2020 and PLATINUM open perspectives* (pp. 79–88). Masaryk University Press. <https://doi.org/10.5817/CZ.MUNI.M210-9983-2021-7>

1.līmenis: Pētniecība matemātikā

Šajā līmenī studenti aktīvi strādā ar matemātikas saturu, izmantojot pētniecībā balstītas pieejas. Tā vietā, lai pasīvi uztvertu informāciju, studenti:

- **pēta** matemātiskas parādības un problēmas;
- **uzdod jautājumus**, kas virza viņu pētniecisko darbību;
- **formulē hipotēzes** par matemātiskajām sakarībām;
- **plāno** un veic izpēti, izmantojot piemērotus rīkus;
- **analizē** datus un meklē likumsakarības;
- **izdara secinājumus** un salīdzina tos ar sākotnējām hipotēzēm;
- **dalās ar rezultātiem** ar vienaudžiem un iesaistās konstruktīvās diskusijās;
- **attīsta problēmas** tālāk, aizsākot jaunu pastāvīgas pētniecības ciklu.

Galvenās pazīmes: Nestrukturēti uzdevumi ar vairākiem iespējamiem risinājumiem un studentu pašu atbildība par savu mācīšanās procesu. Studiju vidē tiek aktīvi veicinātas diskusijas un komandas darbs. Savukārt pasniedzējs pilda jaunu lomu - darbojas kā mācīšanās procesa vadītājs (veicinātājs), nevis kā pasīvas informācijas sniedzējs.

4.attēls

Matricu reizināšanas uzdevumu piemērs no projekta ietvaros izstrādātā uzdevumu kopuma

Problem 3

Two companies manufacture desk lamps, office chairs, and bookshelves. The quantity of each product manufactured per month is shown in the Table 1.

Table 1

Company	Desk lamps	Office chairs	Bookshelves
Company 1	90	150	75
Company 2	120	100	90

The unit prices of each product in euros for three consecutive months are given Table 2.

Table 2

Product	March	April	May
Desk lamps	35	36	38
Office chairs	58	60	59
Bookshelves	72	75	78

Tasks

- Construct a matrix of product quantities for each company.
- Construct a matrix of unit prices for the three months.
- Compute the revenue matrix for each company for each month by multiplying the quantity matrix by the price matrix.
- Explain the economic meaning of the resulting matrix elements.

2.līmenis: Pētniecība matemātikas mācīšanās

Šajā līmenī pasniedzēji analizē savu pedagoģisko pieeju, metodiku, uzdevumu izstrādi un mijiedarbību

ar studentiem. Lai izvērtētu, kas nodarbībās strādā un kas nē, pasniedzēji veido un praktiski īsteno pētniecībā balstītus uzdevumus, kur novēro un analizē studentu mācīšanās procesu, pilnveido mācību materiālus, balstoties uz gūtajām atziņām, reflektē par savu praksi un meklē cēloņsakarības studentu sasniegumos.

Galvenās pazīmes: Saskaņā ar šo modeli profesionālā pilnveide ir mērķtiecīgas un sistemātiskas refleksijas rezultāts. Tā īstenojas pasniedzēju pētnieciskajās kopienās, kurās pasniedzēji sadarbojas, lai analizētu studentu reakciju, kļūdainos priekšstatus un iesaistes līmeni. Balstoties uz šiem reālajiem prakses datiem, mācībspēki mērķtiecīgi pārveido un uzlabo mācību materiālus.

Pašizpētes jautājumi pasniedzējiem:

- Kas padara uzdevumu pētniecībā balstītu?
- Kā studenti reaģē uz dažāda veida pētnieciskajiem uzdevumiem?
- Kāds metodiskais atbalsts studentiem ir nepieciešams dažādos pētniecības posmos?
- Kā veiksmīgi sabalansēt strukturētu un atvērtu pētniecību?

3.līmenis: Attīstošā pētniecība

Šī līmeņa dalībnieki – pētnieki un matemātikas pasniedzēji raugās uz studiju procesu kopumā, lai izvērtētu kopējo attīstības gaitu. Viņi apkopo un analizē datus no pirmā un otrā līmeņa, radot jaunas atziņas par pētniecībā balstītu praksi un sniedzot būtisku ieguldījumu pasniedzēju profesionālajā izaugsmē un studiju procesa pilnveidē.

Galvenās pazīmes: Šī metode koncentrējas uz sistemātisku datu vākšanu, izmantojot novērojumus, aptaujas un intervijas, lai analizētu un noteiktu kopējās tendences, problēmas un pārnēsamus principus. Iegūtie rezultāti tiek nodoti plašākai akadēmiskajai kopienai, tādējādi attīstot teoriju, kas kalpo par pamatu turpmākajai izglītības praksei.

Izziņā balstītas mācīšanās cikls

Izziņā balstītas mācīšanās cikls ir klasiska metode, kas balstās uz Dž. Džūija¹⁴ pieciem domāšanas soļiem, ko sākotnēji dēvēja par “izziņas modeli”. Dž. Bruners¹⁵ (1960) šo ideju vēlāk pilnveidoja par mācīšanās ciklu, kas līdzinās zinātniskās pētniecības procesam. Šis cikls ir noslēgts, taču vienlaikus tas paliek atvērts problēmas paplašināšanai. Autors piedāvā deviņu posmu IBM ciklu, kurā darbības attīstās secīgi. Process sākas ar konteksta radīšanu un ideju ģenerēšanu, kam seko pētnieciskā jautājuma formulēšana, uzsverot, ka tam jābūt atvērtam, nevis “jā/nē” formātā. Trešajā posmā tiek izvirzītas hipotēzes, bet ceturtajā – plānota pati izpēte, sadalot lomas, izvēloties materiālus un izveidojot rīcības plānu. Iesācējiem šis plānošanas posms var izpausties kā mēģinājumu un kļūdu metode. Tam seko praktiskā izpētes veikšana un iegūto datu analīze. Septītajā posmā tiek izdarīti secinājumi un tie salīdzināti ar sākotnējām hipotēzēm. Cikla noslēgumā studenti dalās ar rezultātiem, kas ietver prezentēšanu, salīdzināšanu un konstruktīvu jautājumu uzdošanu, un visbeidzot tālāk attīsta problēmu, kas ciklu atver

¹⁴ Dewey, J. (1989). How we think. In J. A. Boydston (Ed.), John Dewey: The later works, 1925–1953 (Vol. 8, pp. 105–352). Southern Illinois University Press.

¹⁵ Bruner, J. (1960), *The Process of Education*, Harvard University Press.

no jauna turpmākai pētniecībai. Šis modelis ir viegli adaptējams; tā posmus var atkārtot, izlaist vai pārveidot. Atkarībā no mērķa, cikls var būt vērsts gan uz caurviju prasmēm, gan praktiskajām iemaņām vai padziļinātu satura izpratni.

5.attēls

Izziņā balstītas mācīšanās posmi



Izziņā balstītas mācīšanās līmeņi

Pasniedzējs un studenti ir vienlīdz atbildīgi par katra izziņā balstītas mācīšanās cikla posmu izpildi. Pirmais posms, kas ietver konteksta radīšanu un ideju ģenerēšanu, ir vienīgā fāze, kurā pasniedzējs un studenti vienmēr darbojas kopā. Jo mazāk pasniedzējs iejaucas procesā, jo patstāvīgāki un prasmīgāki studenti kļūst pieejas pielietošanā. Pastāv trīs IBM līmeņi – jo augstāks ir līmenis, jo neatkarīgāki studenti kļūst no pasniedzēja atbalsta un sniegtajām norādēm (Kirschner, Sweller, & Clark, 2006¹⁶; Lazonder & Harmsen, 2016¹⁷; Furtak et al., 2012¹⁸). Īstenojot pieeju, pasniedzējam vajadzētu izvēlēties piemērotāko mācīšanās līmeni, balstoties uz nodarbības mērķiem un studentu auditorijas specifiku. Nav ieteicams uzreiz sākt ar visa IBM cikla īstenošanu. Izņēmums ir ārpus studiju nodarbības, kas orientētas uz studentu motivācijas un pozitīvas attieksmes veicināšanu un ir cieši saistītas ar viņu interesēm. Citās situācijās cikls būtu jāievieš pakāpeniski, ņemot vērā studentu vecumu, prasmju līmeni, iepriekšējo IBM pieredzi, kā arī specifiskos zinātniskos jautājumus un izaicinājumus.

Studentu grupās, kuras šo metodi nekad iepriekš nav izmantojušas, ir pieņemami sākt darbu zemākajā (strukturētajā) līmenī un pāriet uz otro (vadīto) līmeni tikai pēc vairāku ciklu īstenošanas. Augstāko (atvērto) līmeni ieteicams piedāvāt studentiem, kuri jau ir iepazinusi šo pieeju, jo tas prasa

¹⁶ Kirschner, P. A., Sweller, J., & Clark, R. E. (2006). Why minimal guidance during instruction does not work: An analysis of the failure of constructivist, discovery, problem-based, experiential, and inquiry-based teaching. *Educational Psychologist*, 41(2), 75–86.

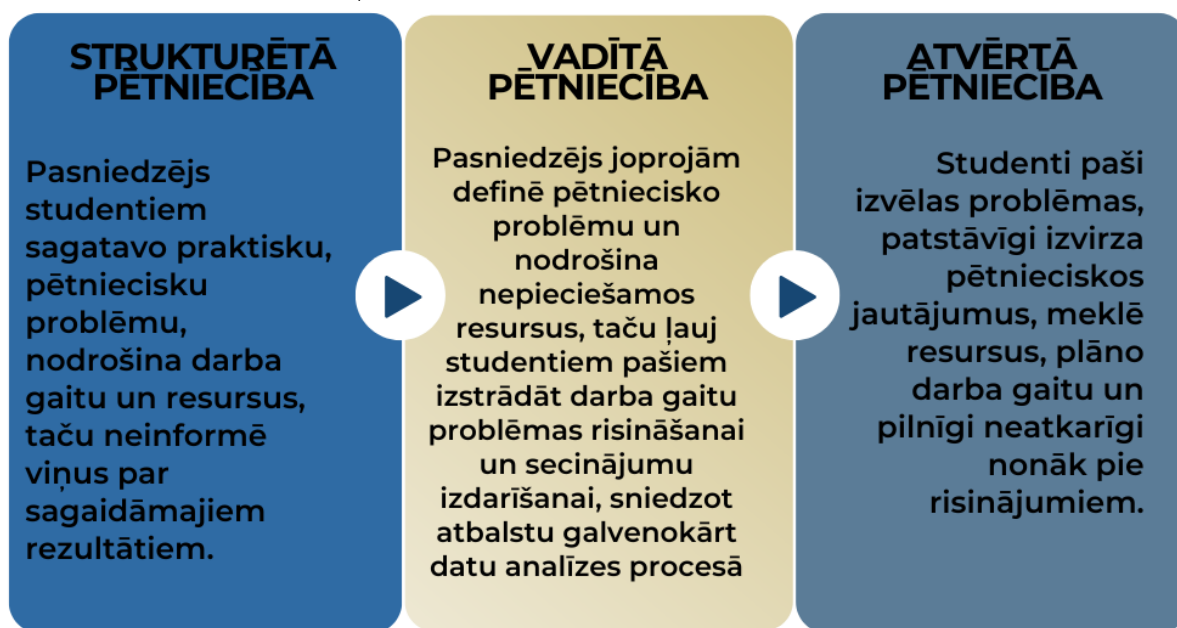
¹⁷ Lazonder, A. W., & Harmsen, R. (2016). Meta-analysis of inquiry-based learning: Effects of guidance. *Review of Educational Research*, 86(3), 681–718. <https://doi.org/10.3102/0034654315627366>

¹⁸ Furtak, E. M., Seidel, T., Iverson, H., & Briggs, D. C. (2012). Experimental and quasi-experimental studies of inquiry-based science teaching: A meta-analysis. *Review of Educational Research*, 82(3), 300–329. <https://doi.org/10.3102/0034654312457206>

augstu autonomiju un pētniecisko procedūru pārzināšanu. Tomēr, ja studenti ir pietiekami nobrieduši, lai paši izvēlētos savām interesēm atbilstošu pētījuma tēmu, atvērto pētniecību laiku pa laikam var ieviest kā starpposmu starp pirmo divu līmeņu īstenošanu, tādējādi veicinot studentu zinātkāri un aizrautību. Atvērtajā līmenī tiek pilnībā aktivizēts studentu radošums, kas vispilnīgāk attīstās, atkārtoti iesaistoties visā IBM darba ciklā. Tomēr šāda veida aktivitātes parasti netiek plaši iekļautas obligātajā mācību programmā. Pētījumi par IBM metodes efektivitāti liecina, ka vislabākos mācīšanās rezultātus satura apgūvē nodrošina tieši pirmie divi līmeņi (Kirschner, Sweller, & Clark, 2006¹⁹; Lazonder & Harmsen, 2016²⁰; Furtak et al., 2012²¹).

6.attēls

Izziņā balstītas mācīšanās līmeņi



Turpmāk šajā nodaļā ir ietverti piemēri no projekta ietvaros izveidotā matemātikas mācību satura katrā līmenī.

Strukturētā pētniecība (zemākais līmenis – pasniedzējs nodrošina problēmu, darba gaitu un resursus)

Tēma: Matricu saskaitīšana un atņemšana

Uzdevuma mērķis ir attīstīt studentu analītiskās prasmes pētnieciskās mācīšanās ietvaros. Studenti tiek nodrošināti ar nepieciešamajiem datiem, resursiem un darba gaitu (matricu saskaitīšanu, atņemšanu un vidējā lieluma aprēķināšanu), taču aprēķinu rezultātu ekonomiskā nozīme netiek atklāta. Studiju procesā, patstāvīgi veicot matemātiskās darbības, studentiem ir jādefinē iegūto rezultātu praktiskā nozīme. Uzdevumā izmantotie dati par trīs veidu lauksaimniecības produktu – graudu, piena un gaļas – ražošanu (nosacītājās vienībās) divās saimniecībās 2023. un 2024. gadā ir sniegti matricu formā.

¹⁹ Kirschner, P. A., Sweller, J., & Clark, R. E. (2006). Why minimal guidance during instruction does not work: An analysis of the failure of constructivist, discovery, problem-based, experiential, and inquiry-based teaching. *Educational Psychologist*, 41(2), 75–86.

²⁰ Lazonder, A. W., & Harmsen, R. (2016). Meta-analysis of inquiry-based learning: Effects of guidance. *Review of Educational Research*, 86(3), 681–718. <https://doi.org/10.3102/0034654315627366>

²¹ Furtak, E. M., Seidel, T., Iverson, H., & Briggs, D. C. (2012). Experimental and quasi-experimental studies of inquiry-based science teaching: A meta-analysis. *Review of Educational Research*, 82(3), 300–329. <https://doi.org/10.3102/0034654312457206>

7.attēls

Matricu saskaitīšana un atņemšana uzdevumu piemērs

Problem 1

Data on the production of three types of agricultural products – grain, milk, and meat (in conventional units) – in two farms for the years 2023 and 2024 are given in the form of matrices:

$$A_{2023} = \begin{pmatrix} 2053 & 571 & 340 \\ 2679 & 453 & 694 \end{pmatrix}, A_{2024} = \begin{pmatrix} 2745 & 644 & 800 \\ 2900 & 451 & 373 \end{pmatrix}.$$

Find:

- the total volume of products produced over the two years (2023 and 2024);
- the growth in production volumes in 2023 compared to 2024, by product types and by farming enterprises;
- the matrix of average annual production of products.

You should also explain the economic meaning of the elements in the resulting matrices.

Solution

Rows: Row 1 – Farm 1; Row 2 – Farm 2. Columns: Column 1 – grain; Column 2 – milk; Column 3 – meat.

- Total volume of products produced over the two years (2023 and 2024):

$$A_{total} = A_{2023} + A_{2024} = \begin{pmatrix} 2053 & 571 & 340 \\ 2679 & 453 & 694 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2745 & 644 & 800 \\ 2900 & 451 & 373 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4798 & 1215 & 1140 \\ 5579 & 904 & 1067 \end{pmatrix}$$

Economic meaning of the resulting matrix:

Total production matrix shows the combined volume of grain, milk, and meat produced by each farm over two years. For example, Farm 1 produced 4798 units of grain in total.

- Growth in production volumes in 2024 compared to 2023:

$$A_{growth} = A_{2024} - A_{2023} = \begin{pmatrix} 2745 & 644 & 800 \\ 2900 & 451 & 373 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2053 & 571 & 340 \\ 2679 & 453 & 694 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 692 & 73 & 460 \\ 221 & -2 & -321 \end{pmatrix}$$

Economic meaning of the resulting matrix:

Growth matrix shows how each product's output changed from 2023 to 2024. For example, Farm 1 increased meat production by 460 units, while Farm 2 decreased meat production by 321 units.

Vadītā pētniecība (vidējais līmenis): pasniedzējs definē problēmu un nodrošina resursus, savukārt studenti patstāvīgi izstrādā darba gaitu

Tēma: Matricu vienādojumi un apgrieztās matricas

No mācību līdzekļa studentiem tiek piedāvāts teksta uzdevums. Studējošajiem tiek nodrošināts vienādojuma piemērs, nepieciešamie resursi un tiek sniegtas instrukcijas par to, kas ir jādara. Šajā posmā pasniedzēja loma ir sniegt atbalstu tikai aprēķinu pārbaudē un rezultātu interpretācijā, nevis nodrošināt detalizētu darba gaitu soli pa solim, tādējādi veicinot studentu patstāvību risinājuma meklēšanā.

8. attēls

Matricu izmantošana ar Leontjeva patēriņa-ražošanas modeli

Problem 5

A company has three workshops, each producing a different type of product: workshop 1 produces product type 1; workshop 2 produces product type 2; workshop 3 produces product type 3. Part of the output is used for internal consumption, while the rest is the final product delivered outside the system.

Tasks:

1. Determine the distribution of products among workshops used for internal consumption.
2. Find the total output of each workshop, given:

The input coefficient matrix (direct consumption matrix):

$$A = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.7 \end{pmatrix}$$

The final demand vector:

$$Y = \begin{pmatrix} 120 \\ 90 \\ 60 \end{pmatrix}$$

Atvērtā pētniecība (augstākais līmenis – studenti paši izvēlas problēmu, izvirza jautājumu, plāno un veic darbu pilnīgi patstāvīgi)

Tēma: Vektoru izmantošana navigācijā (reālās dzīves konteksts, ārpus mācību programmas)

Šajā posmā pasniedzējs nesniedz metodisku atbalstu, bet gan noslēgumā novērtē iegūto rezultātu precizitāti un pamatotību, kas atbilst izziņā balstītas mācīšanās augstākajam līmenim. Atšķirībā no tradicionāla uzdevuma formulējuma, kurā tiktu nodrošināti visi nepieciešamie dati, atvērtā pētniecība pieprasa studējošo patstāvīgu iesaisti visos posmos. Studentiem ir pašiem jāizvēlas ģeogrāfiskie punkti (ostas), jāatrod reāli, aktuāli meteoroloģiskie (vēja) dati un jāizstrādā savs vektoru modelis. Šāds navigācijas piemērs grāmatā netiek piesaistīts konkrētam vingrinājumam, bet gan kalpo kā metodisks ieteikums turpmāko patstāvīgo pētījumu modelēšanai.

9.attēls

Vektoru izmantošana navigācijā uzdevuma piemērs

53. An aircraft takes off from an airport and flies 500 km on a bearing of 045° . It then changes course and flies 1200 km on a bearing of 105° . Finally, it changes course again and flies 1000 km nautical miles on a bearing of 210° .

Determine:

- a) the aircraft's resultant displacement vector (in north-east components),
- b) the distance from the airport to the aircraft,
- c) the bearing of the aircraft's final position from the airport.

Trīs izziņā balstītas mācīšanās līmeņi – strukturētā, vadītā un atvērtā pētniecība – atspoguļo studentu autonomijas un pasniedzēja iesaistes līmeni studiju procesā. Pāreja no strukturētas uz atvērtu pētniecību pakāpeniski pārnes atbildību no pasniedzēja uz studentiem, ļaujot viņiem sev atbilstošā tempā attīstīt patstāvību, kritisko domāšanu un problēmu risināšanas prasmes. Piemērotāko IBM līmeņa izvēli nosaka matemātiskā temata sarežģītība, studentu vecums un kognitīvā attīstība, iepriekšējā pieredze ar pētniecības metodēm, kā arī konkrētie nodarbības mācību mērķi. Strukturēta pieeja nodrošina

nepieciešamo atbalsta struktūru un vairo pārliecību studentiem, kuri tikko uzsāk šādu darbu vai apgūst jaunus matemātikas jēdzienus. Augstākie rezultāti bieži tiek sasniegti tieši strukturētajā un vadītajā līmenī, kad tiek sniegts atbilstošs atbalsts, vienlaikus neatņemot studentiem prieku un izaicinājumu pašiem atklāt risinājumu. Lai gan atvērtā pētniecība no studentiem prasa lielāku kognitīvo piepūli, tā sniedz izcilas iespējas radošuma, padziļinātai iesaistei un pētniecisko prasmju attīstībai, jo īpaši tad, ja tā ir saistīta ar tēmām, kas studentus patiesi interesē.

Saistība ar ikdienas dzīvi

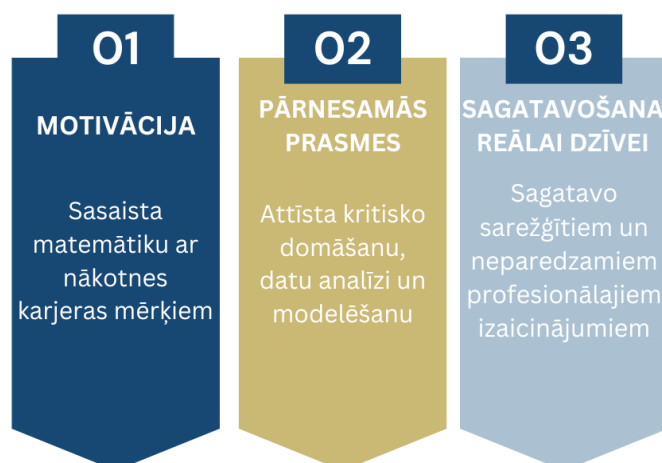
Studenti matemātiku bieži uzskata par akadēmisku un izolētu priekšmetu, kurā formulas, noteikumi un uzdevumi šķiet maz saistītas ar reālo pasauli ārpus auditorijas sienām. Pasniedzējiem noteikti būs nācies dzirdēt studentu izteikumus, piemēram: “*Man ir 22 gadi, un es savā dzīvē vēl ne reizi neesmu izmantojis sinusu vai kosinusu*”. Šāda perspektīva parasti mazina motivāciju, vājina iesaisti un rada izpratnes trūkumu par matemātisko zināšanu lomu ikdienas un profesionālajā kontekstā. Tāpēc viens no galvenajiem izaicinājumiem matemātikas studijās augstākajā izglītībā un izglītībā kopumā ir mazināt plaisu starp teorētiskajām idejām un to praktisko lietojumu, padarot mācību procesu saistošu, jēgpilnu un orientētu uz reālās dzīves situācijām.

Lai risinātu šo problēmu, projektā “Tradīcijas un inovācijas Baltijas un Ziemeļvalstu matemātikas izglītībā / 2025” mācīšanas stratēģijās un resursos ir integrēta cieša saikne ar reālo dzīvi. Projekta ietvaros izveidotie mācību materiāli ir izstrādāti ne tikai matemātisko zināšanu sniegšanai, bet arī ar mērķi parādīt, ka matemātika ir efektīvs instruments problēmu analīzei, modelēšanai un risināšanai gan profesionālajā darbībā gan sabiedrībā kopumā. Sasaistot matemātiskos jēdzienus ar reālām situācijām inženierzinātnēs, tehnoloģijās, biznesā, navigācijā, vides zinātnē un citās ar STEM saistītās jomās, šie materiāli demonstrē studentiem, ka matemātika nav izolēta disciplīna, bet gan būtiska mūsdienu inovāciju, lēmumu pieņemšanas un problēmu risināšanas sastāvdaļa.

Saiknei ar reālo dzīvi matemātikas mācīšanā ir vairākas priekšrocības (skat. 10. attēlu). Pirmkārt, tā paaugstina studentu motivāciju, sniedzot atbildi uz pragmatisko jautājumu: “Kāpēc man tas jāmācās?” Kad studējošie saskata matemātisko konceptu izmantošanas iespējas savā nākotnes profesijā, uzlabojas tēmas uztvere un kognitīvā iesaiste. Otrkārt, šī pieeja attīsta tādas pārnēsamās prasmes kā kritiskā domāšana, datu analīze un modelēšana, kas ir augsti pieprasītas darba tirgū. Treškārt, tā sagatavo studentus reālās darba vides izaicinājumiem, kur problēmsitācijas reti ir teorētiski idealizētas; tās pieprasa elastīgu zināšanu pielāgošanu un pielietojumu neparedzamos apstākļos.

10.attēls

Saikne ar reālo dzīvi



Baltijas un Ziemeļvalstu reģionā augstu vērtē inovācijas, tehnoloģijas un ilgtspējīgu attīstību – jomas, kuru izaugsme ir tieši atkarīga no matemātikas prasmju attīstības līmeņa. Reģiona ekonomika lielā mērā balstās uz tādām nozarēm kā datu zinātne, inženierzinātnes, atjaunojamā enerģija, informācijas tehnoloģijas un jūras pārvadājumu loģistika. Šīm jomām ir nepieciešami speciālisti, kuri spēj modelēt kompleksas sistēmas, loģiski spriest un pieņemt datus balstītus lēmumus. Organizējot matemātikas apguvi atbilstoši sabiedrības un darba tirgus prasībām, šis projekts palīdz veidot darbaspēku, kas ir ne tikai matemātiski izglītots, bet arī spējīgs izmantot matemātisko domāšanu kompleksu un praktisku problēmu risināšanā.

Lai parādītu, kā lineārās algebras, matemātiskās analīzes, vektoru un citu matemātikas nozaru idejas var integrēt profesionālajā darbībā un ikdienas situācijās, nākamajā sadaļā ir sniegti konkrēti praktisko uzdevumu piemēri, kas piemēri izceļ matemātikas lietderību un kalpo kā vadlīnijas pasniedzējiem, izstrādājot savus, uz aktuālām problēmām orientētus uzdevumus. Tādējādi tiek sekmēts projekta pamatmērķis – padarīt matemātikas izglītību saistošāku, jēgpilnāku un ciešāk saistītu ar pasauli ārpus auditorijas sienām.

11. attēls

Vektoru kustības skaidrojums

A Right-hand triple $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ can also be visualized using the right-hand rule:

If you place the index finger of your right hand along the first vector $\vec{a}$ and the middle finger along the second vector $\vec{b}$, then your thumb points in the direction of the third vector $\vec{c}$.

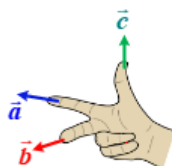


Figure 32. The direction of the cross product
(Image adopted from work by Acdx licensed under CC-BY-SA 3.0)

Another explanation of the same rule:

If vectors $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ form a right-handed triple, you can determine the direction of $\vec{c}$ by placing the fingers of your right hand along the first vector $\vec{a}$ and bending them toward the second vector $\vec{b}$. Your thumb will point in the direction of the third vector $\vec{c}$.

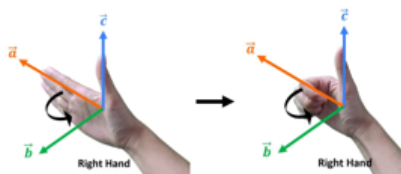


Figure 33. The direction of the cross product
(Image from <https://www.wizeprep.com/online-courses>)

Vektorus plaši izmanto mehānikā, mašīnbūvē un robotikā, lai analizētu uz objektiem iedarbojošos spēkus, aprēķinātu konstrukciju slodzes, piemēram, ēkām, tiltiem un mašīnu detaļām, kā arī pētītu mehānismu kinemātiku un cietu ķermeņu kustību. Vektori tiek uzskatīti par vienu no dinamikas, kinemātikas un statikas matemātiskajiem pamatjēdzieniem, un tiem ir būtiska nozīme arī svārstību teorijā, spriegumu analīzē un dinamisko sistēmu modelēšanā.

12. attēls

Robotizētas rokas statiskā analīze

A medium-class 6-axis industrial robot holds a payload of mass $m = 10$ kg. A fixed Cartesian coordinate system is attached to the robot base and is shown in Fig.49.

The center of the robot's elbow joint is located at point $B(0.2, 0.25, 0.7)$ m.

The tool flange (end-effector mounting point) is located at point $E(0.5, 0.6, 0.9)$ m.

The payload is rigidly grasped. Its center of mass C is located $d = 0.12$ m below the tool flange along the negative Z-axis.

Find the moment of the force (torque) of the payload weight about the elbow joint point B and its magnitude.

Assumptions: Static analysis. Only the payload weight is considered; the self-weight of the robot links (arm/forearm) and the gripper is neglected.

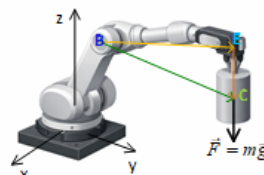


Figure 49. An industrial robot holds a payload

Šo formulu izmanto GPS navigācijas algoritmos, lai noteiktu objekta, piemēram, automašīnas, pašreizējo ātrumu un kustības virzienu, kā arī prognozētu tā turpmāko atrašanās vietu telpā.

13. attēls

Lamberta atstarošanas modelis datorgrafikā

For example, to model light reflection from a matte or rough surface (such as concrete, paper, or plaster), the diffuse lighting model is used, in which light is reflected uniformly in all directions.

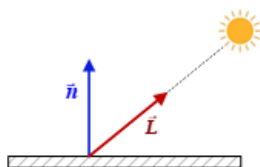


Figure 58(a).

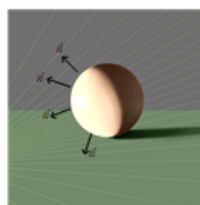


Figure 58(b). Lighting in 3D graphics

This model is described by Lambert's reflection model, according to which the brightness of an illuminated surface depends only on the angle of incidence of the light (Fig.58). The amount of light reaching the surface is given by the following formula:

$$I = k_d I_L \vec{L} \cdot \vec{n}$$

Projekta ietvaros ir izstrādāts arī uzdevumi lineārajā algebrā. Turpinājumā ir sniegti daži uzdevumu piemēri, kuros integrēta cieša saikne ar reālās dzīves kontekstu.

14. attēls

Uzdevumu piemēri matemātikas izmantošanai ikdienas dzīves kontekstā

A European manufacturer plans to produce the following number of units in September: 600 electric kettles; 950 toasters and 400 microwave ovens.

To manufacture these appliances, the company uses five types of materials: steel, plastic, glass, copper wire, and insulation. The required amount of each material (in kg per unit) and the cost per kilogram in euros are provided below.

Material requirements per unit (kg):

Appliance	Steel	Plastic	Glass	Copper wire	Insulation
Electric kettles	1.2	0.8	0.4	0.2	0.1
Toasters	1.0	1.1	0.2	0.3	0.2
Microwave ovens	2.5	1.8	1.0	0.5	0.3

Cost per kilogram of materials (in euros): Steel: €3.20; Plastic: €2.40; Glass: €1.80; Copper wire: €6.00 and Insulation: €2.00.

Tasks:

- Calculate the total quantity of each material needed for the entire production plan.
- Determine the material cost per unit of each appliance.
- Find the total material cost for producing all planned units.

Sekojošais piemērs parāda, kā matricu algebra ļauj strukturēt datus un analizēt reālās dzīves situācijas, lai optimizētu transporta loģistiku un precīzi noteiktu uzņēmumam nepieciešamo autobusu skaitu.

8) A transportation company has three bus routes (rows) and data for four days (columns):

$$A = \begin{pmatrix} 120 & 135 & 150 & 140 \\ 80 & 95 & 100 & 110 \\ 200 & 210 & 190 & 205 \end{pmatrix}$$

Find the total number of passengers over 4 days for each route and the daily average. Model the effect of a 15% increase in passenger traffic (e.g., adding one more bus) and recalculate the totals.

Izziņā balstītā mācību procesā būtiska nozīme ir ne tikai pašam uzdevumam, bet arī tam, kā pasniedzējs studentus iepazīstina ar konkrēto uzdevumu, organizē studentu darbu, virza domāšanu un noslēdz uzdevuma apspriešanu. Tāpēc, plānojot uzdevuma izmantošanu matemātikas studiju procesā, ieteicams pievērst uzmanību pieciem savstarpēji saistītiem posmiem: ievadam, motivācijai, studentu darbībai, apspriešanai, kā arī vērtēšanai un refleksijai.

1. Ievads

Uzdevuma ievads ir būtisks posms, jo tas palīdz studentiem saprast, par ko būs uzdevums, kāpēc tas ir nozīmīgs un ar kādu matemātisko ideju tas saistīts. Izziņā balstītā pieejā ieteicams uzdevumu neuzsākt

uzreiz ar formulu vai tehnisku instrukciju, bet gan ar īsu problēmsituāciju, jautājumu vai piemēru, kas aktivizē studentu domāšanu.

Ievadā pasniedzējs var:

- ✓ īsi raksturot situāciju, kurā konkrētais matemātiskais jēdziens tiek izmantots;
- ✓ uzdot problēmjaudājumu, kas rosina domāt par iespējamu risinājumu;
- ✓ sasaistīt uzdevumu ar iepriekš apgūto vielu vai ar studiju programmas profesionālo kontekstu;
- ✓ precizēt, kāds būs uzdevuma mērķis.

Piemēram, pasniedzējs jautā: “Kā matemātiski aprakstīt objekta kustību, ja to vienlaikus ietekmē vairāki virzieni?” vai “Kā šādu situāciju risinātu speciālists praksē?” Šāds ievads palīdz studentam uztvert uzdevumu nevis kā izolētu aprēķinu, bet kā daļu no plašākas problēmas.

2. Studentu motivēšana

Pēc ievada svarīgi panākt, lai studenti saprot, kāpēc ir būtiski atrisināt konkrēto uzdevumu. Motivācija nav tikai interese par tēmu, bet arī izpratne par uzdevuma jēgu, tā saikni ar profesionālo darbību un iespējamo pielietojumu.

Studentu motivēšanai var izmantot vairākus paņēmienus:

- ✓ saikni ar reālo dzīvi vai profesiju, parādot, kur attiecīgais matemātiskais paņēmiens tiek lietots;
- ✓ problēmjaudājumu, uz kuru students meklē atbildi uzdevuma gaitā;
- ✓ izvēles vai interpretācijas iespēju, ļaujot studentam ne tikai izpildīt aprēķinu, bet arī domāt par rezultāta nozīmi.

Motivācijas posmā pasniedzējs var uzsvērt, ka uzdevuma mērķis nav tikai iegūt pareizu skaitlisku atbildi, bet arī saprast, ko šī atbilde nozīmē un kā matemātiskais modelis palīdz izprast konkrēto situāciju.

3. Studentu darbības organizēšana

Trešajā posmā pasniedzējs organizē uzdevuma risināšanas procesu. Darba forma var atšķirties atkarībā no uzdevuma sarežģītības, studiju kursa mērķa un studentu sagatavotības. Uzdevumu var risināt individuāli, pāros, nelielās grupās vai kopīgi visai auditorijai.

Šajā posmā svarīgi, lai studenti ne tikai izpildītu aprēķinus, bet arī:

- ✓ analizētu uzdevuma nosacījumus;
- ✓ noteiktu, kādu matemātisko paņēmieni vai modeli izmantot;
- ✓ pamatotu izvēlēto risināšanas ceļu;
- ✓ salīdzinātu iespējamās pieejas;
- ✓ interpretētu rezultātu dotajā situācijā.

Pasniedzēja uzdevums šajā posmā ir nevis uzreiz sniegt gatavu risinājumu, bet virzīt studentu domāšanu ar atbalstošiem jautājumiem, piemēram:

- ✓ “Kāpēc izvēlējāties tieši šo paņēmieni?”
- ✓ “Ko nozīmē šis rezultāts dotajā situācijā?”
- ✓ “Vai šo uzdevumu varētu risināt citā veidā?”
- ✓ “Kas mainītos, ja sākotnējie dati būtu citi?”

Šādi jautājumi palīdz pārvērst uzdevumu no mehāniska vingrinājuma par izziņas procesu.

4. Uzdevuma apspriešana un rezultātu analīze

Pēc uzdevuma izpildes nozīmīgs ir apspriešanas posms, jo tieši tajā studenti var salīdzināt savus risinājumus, precizēt kļūdas, formulēt secinājumus un apzināties izmantotās matemātiskās idejas.

Apspriešanā pasniedzējs var:

- ✓ aicināt studentus prezentēt savu risinājuma gaitu;
- ✓ salīdzināt atšķirīgas pieejas;
- ✓ pievērst uzmanību biežākajām kļūdām vai neprecizitātēm;
- ✓ uzsvērt, kā iegūtais rezultāts interpretējams konkrētajā situācijā;
- ✓ sasaistīt uzdevuma rezultātus ar plašāku matemātisko vai profesionālo kontekstu.

Svarīgi, lai apspriešana nebeigtos tikai ar “pareizās atbildes” nosaukšanu. Daudz būtiskāk ir parādīt, kāpēc risinājums ir atbilstošs, kā to var interpretēt un ko no šī uzdevuma iespējams vispārināt.

5. Vērtēšana un refleksija

Izziņā balstītā mācību procesā vērtēšana ietver ne tikai gala rezultātu, bet arī studenta domāšanas procesu, risinājuma izvēli, argumentāciju un spēju interpretēt iegūto atbildi. Tāpēc, vērtējot uzdevumu, ieteicams pievērst uzmanību vairākiem aspektiem:

- ✓ vai students saprot problēmu un uzdevuma nosacījumus;
- ✓ vai izvēlēts atbilstošs matemātiskais paņēmieni;
- ✓ vai aprēķini veikti korekti;
- ✓ vai students spēj interpretēt rezultātu;
- ✓ vai secinājumi ir loģiski un pamatoti.

Līdzās vērtēšanai svarīga ir arī refleksija. Tā palīdz studentam apzināties, ko viņš šajā uzdevumā ir iemācījies, kas bija grūtākais un kā iegūtās zināšanas var izmantot turpmāk. Refleksijas jautājumi var būt ļoti īsi, piemēram:

- ✓ Kas šajā uzdevumā bija galvenā ideja?
- ✓ Kas sagādāja vislielākās grūtības?
- ✓ Ko nozīmē iegūtais rezultāts?
- ✓ Kur šādu matemātisko pieeju varētu izmantot praksē?

Tādējādi uzdevuma izmantošana izziņā balstītā mācību procesā nav reducējama tikai uz uzdevuma izvēli vai atrisināšanu. Tā ietver mērķtiecīgu ievadu, studentu motivēšanu, aktīvu darbības organizēšanu, rezultātu apspriešanu, kā arī vērtēšanu un refleksiju. Šāda pieeja palīdz pasniedzējam izmantot matemātikas uzdevumus ne tikai zināšanu nostiprināšanai, bet arī studentu analītiskās domāšanas, problēmrisināšanas, argumentēšanas un matemātikas lietojuma izpratnes attīstīšanai.

2.tabula

Kritēriji matemātikas mācību procesa atbilstības izziņā balstītas mācīšanas principiem izvērtēšanai

Kritērijs	Jautājums pasniedzējam
Problēmas raksturs	Vai uzdevumā ir problēmsituācija, kas prasa domāt, nevis tikai izpildīt algoritmu?
Studenta aktivitāte	Vai students pieņem lēmumus, formulē pieņēmumus, izvēlas risinājuma gaitu?
Interpretācija	Vai studentam jāinterpretē iegūtais rezultāts?
Konteksts	Vai uzdevums ir sasaistīts ar jēgpilnu profesionālu vai reālās dzīves situāciju?
Refleksija	Vai uzdevums paredz secinājumu formulēšanu un risinājuma izvērtēšanu?
Pasniedzēja loma	Vai pasniedzējs vada procesu ar jautājumiem, nevis tikai demonstrē risinājumu?

Pētījumos balstīti pierādījumi: matemātikas prasmju nozīme darba tirgū

Raugoties no darba tirgus perspektīvas, mācību materiāliem ir jāpalīdz studentiem uztvert matemātiku kā funkcionālu instrumentu reālās dzīves problēmu analīzei, modelēšanai un risināšanai. Tādas kompetences kā problēmu risināšana, kvantitatīvā pamatošana, rezultātu interpretācija, optimizācija un digitālo rīku izmantošana ir augsti pieprasītas visdažādākajās profesijās un būtiski veicina absolventu spēju pielāgoties mainīgajām darba tirgus prasībām (skat. 15. attēlu).

15.attēls

Darba tirgus kompetences



Pētījumi liecina, ka matemātikas pamatprasmes ir cieši saistītas ar labākiem rādītājiem darba tirgū. Studenti, kuru zināšanas nesasniedz matemātiskās kompetences pamatlīmeni, retāk izvēlas turpināt studijas augstākajā izglītībā un nākotnē saskaras ar mazāk labvēlīgām karjeras izaugsmes iespējām (Meehan, Pacheco, & Schober, 2023)²².

Saskaņā ar Meehan et al. (2023)²² pētījumu, personas ar zemu matemātikas prasmju līmeni vairāk nekā četras reizes retāk iegūst bakalaura grādu un gandrīz piecas reizes retāk izmanto iespēju iestāties universitātē salīdzinot ar vienaudžiem, kuru matemātikas prasmes ir vidējā vai augstā līmenī. Tā kā augstākajai izglītībai ir izšķiroša nozīme karjeras attīstībā su ienākumu līmeņa kontestkā, šai izglītības nevienlīdzībai ir ilgtermiņa sekas.

Jaunieši ar augstākām matemātikas prasmēm biežāk strādā par speciālistiem, kā arī veic biroja vai administratīvos pienākumus, turpretī jaunieši ar vājām kompetencēm biežāk tiek nodarbināti profesijās, kas ietver fiziska darba veikšanu. Ienākumu plaisu starp dažādām grupām daļēji izskaidro tieši šī profesiju izvēle (Meehan et al., 2023²²). Millers(2025)²³ apgalvo, ka šī tendence nav nejauša, bet gan atspoguļo dziļāku “matematizācijas” procesu – parādību, kurā matemātiskā loģika kļūst par valdošo ietvaru ekonomiskās dzīves sakārtošanai, iedalot iedzīvotājus “uzvarētājus” un “zaudētājus”, balstoties uz viņu matemātisko kompetenci.

Papildus ietekmei uz nodarbinātību un ienākumiem vāju rēķināšanas prasību sekas skar arī citus dzīves aspektus. Millers (2025)²³ norāda, ka sabiedrības pieaugošā matematizācija rada vairākas sociālekonomiskas pretrunas. No vienas puses, lēmumu pieņemšana arvien biežāk balstās matemātiskās optimizācijas loģikā, kas var sašaurināt skatījumu uz iespējamajiem risinājumiem un ierobežot spēju saskatīt alternatīvas, īpaši ilgtspējīgas attīstības kontekstā. No otras puses, matemātisko modeļu un algoritmu izmantošanas sociālās un vides sekas bieži paliek maz redzamas vai nepietiekami apzinātas, īpaši tiem, kuri no šo risinājumu sniegtajiem ieguvumiem gūst vislielāko labumu.

Ekonomiskās sadarbības un attīstības organizācijas OECD (2024b)²⁴ analīze apstiprina, ka pieaugušie ar augstāku rēķināšanas prasību biežāk ir nodarbināti, saņem lielāku atalgojumu, kā arī biežāk

²² Meehan, L., Pacheco, G., & Schober, T. (2023). *Basic reading and mathematics skills and the labour market outcomes of young people: Evidence from PISA and linked administrative data* (Economics Working Paper Series No. 2023/01). Auckland University of Technology.

²³ Müller, D. (2025). *The mathematisation of the world: Uncovering the socio-economic tensions for ethics in mathematics education* (Working Paper). Auckland University of Technology. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2510.23349>

²⁴ OECD. (2024b). *Education at a glance 2024: OECD indicators*. OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/c00cad36-en>.

novērtē savu veselības stāvokli un dzīves kvalitāti pozitīvāk. Savukārt zems rēķināšanas prasmes līmenis ir saistīts ar aptuveni 7 % lielāku bezdarba vai ekonomiskās neaktivitātes risku. Pētījuma dati rāda, ka cilvēkiem ar augstu rēķināšanas prasmi ienākumi vidēji ir par 13 % lielāki nekā tiem, kuriem šīs prasmes ir zemākā līmenī. OECD valstīs matemātiskās domāšanas pieaugums par vienu standartnovirzi vidēji saistīts ar darba samaksas pieaugumu par 9 % (OECD, 2024b).

Jonasa (2018)²⁵ pētījums rāda, ka matemātiskā sagatavotība veicina arī finanšu prasmes attīstību. Finanšu prasme savukārt ietekmē svarīgus lēmumus dažādos dzīves posmos, piemēram, aprēķinot hipotekārā kredīta maksājumus, aizpildot nodokļu deklarācijas vai plānojot pensijas uzkrājumus. No izglītības perspektīvas šie secinājumi uzsver, ka studentiem ir nepieciešamas ne tikai tehniskas matemātiskās zināšanas, bet arī kritiskā domāšana. Tā palīdz izprast, kā matematika darbojas sabiedrībā, kam tās izmantošana sniedz ieguvumus un kuras sabiedrības grupas var palikt novārtā. Kā apgalvo Millers (2025)²³ matemātikas izglītībai jāsniedz tālāk par formulu apguvi un uzdevumu tehnisku risināšanu. Tās uzdevums ir sagatavot studentus pilnvērtīgai līdzdalībai pilsoniskajā dzīvē arvien vairāk matematizētā sabiedrībā, kurā līdzās procesuālajai kompetencei un algebrisko darbību pārvaldīšanai būtiska nozīme ir arī spējai kritiski analizēt, apšaubīt un izvērtēt matemātiski pamatotus risinājumus, kā arī saskatīt iespējamās alternatīvas.

Ilgtspējīga matemātikas izglītība

Mūsdienu sabiedrības straujā attīstība, tehnoloģiju progress un darba tirgus pārmaiņas arvien vairāk palielina pieprasījumu pēc speciālistiem STEM jomās. Vienlaikus arvien lielāka uzmanība tiek pievērsta ilgtspējīgai attīstībai, kas ietver ne tikai vides, bet arī izglītības un sociālos aspektus. Apvienoto Nāciju Organizācijas 2030 Ilgtspējīgas attīstības mērķi, (2015)²⁶ uzsver nepieciešamību pēc kvalitatīvas izglītības, kas sagatavo studentus mūsdienu izaicinājumiem, tostarp tehnoloģiju pārvaldībai un ilgtspējīgai domāšanai. Šajā kontekstā augstākās izglītības matemātikai ir būtiska nozīme, jo tā veido pamatu kritiskajai domāšanai, problēmu risināšanai un analītiskajām prasmēm.

Ilgtspējīga matemātikas izglītība attiecas uz tādām mācīšanas, mācīšanās un vērtēšanas pieejām, kas nodrošina atbilstību, efektivitāti un vides atbildību (Joutsenlahti & Perkkilä, 2019)²⁷. Tā ietver:

3.tabula

Ilgtspējīgas matemātikas izglītības elementu raksturojums

Ilgtspējīgas matemātikas izglītības elements	Apraksts
Reālu problēmu risināšana	Matemātikas uzdevumi, kas saistīti ar resursu pārvaldību, vides piesārņojumu, klimata pārmaiņām un citiem aktuāliem jautājumiem
Starpdisciplinārā pieeja	Matemātikas integrācija ar citām disciplīnām, lai risinātu kompleksas problēmas

²⁵ Jonas, N. (2018), "Numeracy practices and numeracy skills among adults", *OECD Education Working Papers*, No. 177, OECD Publishing, Paris, <https://doi.org/10.1787/8f19fc9f-en>.

²⁶ United Nations. (2015). *Transforming our world: The 2030 Agenda for Sustainable Development*. <https://sdgs.un.org/2030agenda>

²⁷ Joutsenlahti, J., & Perkkilä, P. (2019). Sustainability development in mathematics education: A case study of what kind of meanings do prospective class teachers find for the mathematical symbol " $\frac{2}{3}$ "? *Sustainability*, 11(2), Article 457. <https://doi.org/10.3390/su11020457>

Tehnoloģiju integrācija	Mūsdienīgu tehnoloģiju izmantošana mācību procesā, lai uzlabotu izpratni un pieejamību
Kritiskā domāšana	Spēja analizēt, izvērtēt un pieņemt pārdomātus lēmumus, balstoties uz matemātiskajiem datiem
Ētiskā atbildība	Izpratne par matemātisko lēmumu ilgtermiņa ietekmi uz vidi un sabiedrību

Matemātikas izglītība tiek pārveidota, lai veicinātu ilgtspējīgu domāšanu un praksi, padarot studentus un pasniedzējus informētus par globālo situāciju (Widiati & Juandi, 2019)²⁸. Tas nozīmē, ka matemātikas mācību saturs un metodes tiek pielāgotas, lai veicinātu ne tikai matemātisko prasmju, bet arī atbildības un ilgtspējīgas rīcības attīstību.

Pētījumi liecina, ka tehnoloģijās balstītas mācību metodes ir būtiskas, lai nodrošinātu ilgtspējīgu matemātikas izglītību, īpaši 4. industriālās revolūcijas (4IR) laikmetā pēc COVID-19 pandēmijas (Naidoo & Singh-Pillay, 2023)²⁹. Tehnoloģijās balstītas mācību metodes ietver dažādu digitālo rīku, platformu un ierīču izmantošanu mācīšanai, vērtēšanai un mācīšanās procesam. Kopienas izpētes teorētiskais ietvars un **SAMR** (Substitution, Augmentation, Modification, Redefinition) modelis (Naidoo & Singh-Pillay, 2023)²⁹. CoI modelis uzsver trīs savstarpēji saistītu komponentu nozīmi:

- **Sociālā klātbūtne** – spēja komunicēt un mijiedarboties drošā tiešsaistes vidē.
- **Pasniedzēja klātbūtne** – pasniedzēja atbalsts, vadība un mācību procesa organizācija.
- **Kognitīvā klātbūtne** – spēja veidot nozīmīgas zināšanas, sadarbojoties un risinot problēmas.

SAMR modelis savukārt palīdz izprast, kā tehnoloģijas var uzlabot vai pārveidot tradicionālo pedagoģiju (skatīt 4. tabulu).

4. tabula

SAMR līmeņu raksturojums

SAMR līmenis	Apraksts	Piemērs matemātikā
Aizstāšana (<i>Substitution</i>)	Tehnoloģija aizstāj tradicionālos rīkus bez būtiskām izmaiņām	Digitāla mācību grāmata papīra vietā
Papildināšana (<i>Augmentation</i>)	Tehnoloģija uzlabo mācību procesu	Interaktīvi uzdevumi ar tūlītēju atgriezenisko saiti
Modifikācija (<i>Modification</i>)	Tehnoloģija ļauj būtiski pārveidot mācību aktivitātes	Sadarbība tiešsaistē, lai risinātu kompleksus matemātikas projektus
Pārdefinēšana (<i>Redefinition</i>)	Tehnoloģija rada pilnīgi jaunas mācību iespējas	Globāla sadarbība datu analīzē un matemātiskajā modelēšanā

Lai nodrošinātu ilgtspējīgu matemātikas izglītību augstskolās, ir svarīgi ņemt vērā vairākus praktiskus aspektus, kas izriet no pētījumiem un labās prakses piemēriem.

²⁸ Widiati, I., & Juandi, D. (2019). Philosophy of mathematics education for sustainable development. *Journal of Physics: Conference Series*, 1157, Article 022128. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1157/2/022128>

²⁹ Naidoo, J., & Singh-Pillay, A. (2023). Embedding sustainable mathematics higher education in the Fourth Industrial Revolution era post-COVID-19: Exploring technology-based teaching methods. *Sustainability*, 15(12), Article 9692. <https://doi.org/10.3390/su15129692>

1. Resursu pieejamība un digitālā plaisa

Viens no galvenajiem izaicinājumiem ir nodrošināt vienlīdzīgu piekļuvi tehnoloģijām un interneta savienojumam. Studentiem no mazāk nodrošinātām ģimenēm var nebūt pieejami nepieciešamie digitālie resursi, kas pastiprina nevienlīdzību izglītībā (Naidoo & Singh-Pillay, 2023)²⁹. Tāpēc augstskolām jāveicina atvērto izglītības resursu (OER) izmantošana un jānodrošina tehniskais atbalsts.

2. Jēgpilna mācīšanās un reālās dzīves saikne

Ilgspējīga matemātikas izglītība prasa, lai mācību saturs būtu saistīts ar reālās dzīves problēmām un ilgtspējīgas attīstības mērķiem (Joutsenlahti & Perkkilä, 2019)²⁷. Piemēram, studenti var analizēt datus par klimata pārmaiņām, modelēt resursu patēriņu vai izstrādāt optimizācijas risinājumus atjaunojamai enerģijai. Šādi uzdevumi padara matemātiku jēgpilnu un parāda tās nozīmi sabiedrībā.

3. Sadarbība un starpdisciplinārītāte

Ilgspējīgas attīstības problēmas ir kompleksas un prasa starpdisciplināru pieeju. Matemātikas izglītība jāintegrē ar citām jomām, piemēram, inženierzinātnēm, ekonomiku un vides zinātnēm, lai studenti spētu risināt reālas problēmas. Sadarbība starp dažādām fakultātēm un institūcijām, kā arī starptautiskā sadarbība (kā šajā Nordplus projektā) veicina pieredzes apmaiņu un inovatīvu risinājumu izstrādi.

Noslēgumā jāuzsver, ka ilgtspējīga matemātikas izglītība augstākajā izglītībā nav reducējama vienīgi uz zināšanu un prasmju apguvi šaurā disciplinārā izpratnē. Tā ietver plašāku skatījumu uz matemātikas lomu sabiedrībā, profesionālajā darbībā un ilgtspējīgas attīstības procesos, akcentējot pieejamību, jēgpilnu mācīšanos, starpdisciplinārītāti un atbildīgu tehnoloģiju izmantošanu. Šāda pieeja stiprina studentu spēju ne tikai lietot matemātiskos jēdzienus un metodes, bet arī kritiski izvērtēt to pielietojumu, saskatīt matemātikas saikni ar reālām problēmām un izmantot iegūtās zināšanas sabiedrības ilgtspējīgas attīstības labā.

Izmantotā literatūra

1. Bruner, J. (1960). *The process of education*. Harvard University Press.
2. Dewey, J. (1989). How we think. In J. A. Boydston (Ed.), *John Dewey: The later works, 1925–1953* (Vol. 8, pp. 105–352). Southern Illinois University Press.
3. Dorier, J.-L., & Maaß, K. (2020). Inquiry-based mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (2nd ed., pp. 384–388). Springer Verlag.
4. European Commission. (2022, January 18). *Communication from the Commission to the European Parliament, the Council, the European Economic and Social Committee and the Committee of the Regions on a European strategy for universities* (COM/2022/16 final). EUR-Lex. <https://eur-lex.europa.eu/legal-content/EN/TXT/?uri=celex:52022DC0016>
5. European Commission. (2025a). *Education and training monitor 2025: Country report: Latvia*. Publications Office of the European Union. <https://op.europa.eu/webpub/eac/education-and-training-monitor/en/country-reports/latvia.html>
6. European Commission. (2025b, August 21). *Key competences*. European Education Area. <https://education.ec.europa.eu/focus-topics/improving-quality/key-competences>
7. European Commission. (2026, March 20). *Boosting STEM participation in tertiary education: a persistent challenge*. Education Chart of the Month. Directorate-General for Education, Youth, Sport and Culture. <https://education.ec.europa.eu/resources-and-tools/data-and-analysis-on-education-and-skills/key-trends-in-education/stem-in-tertiary-education>
8. Furtak, E. M., Seidel, T., Iverson, H., & Briggs, D. C. (2012). Experimental and quasi-experimental studies of inquiry-based science teaching: A meta-analysis. *Review of Educational Research*, 82(3), 300–329. <https://doi.org/10.3102/0034654312457206>
9. Gonzalez, J. J. M. (2023). The power of vectors: Understanding their application and importance. *Research & Reviews: Journal of Statistics and Mathematical Sciences*, 9(4), 007. <https://www.rroij.com/open-access/the-power-of-vectors-understanding-their-application-and-importance.php?aid=94049>
10. Ichsan, I., Mulyati, M., Duma, S. Y., & Nirfayanti, N. (2024). The effectiveness of mathematics learning with the STEAM approach in improving students' critical thinking skills. *Aksioma Education Journal*, 1(3), 1–16. <https://doi.org/10.62872/kdepagn33>
11. Institute of Economics of the Latvian Academy of Sciences. (2025, September 24). *Latvia monthly briefing: STEM youth development drives fintech growth: Latvia case study*. China-CEE Institute. <https://china-cee.eu/2025/09/24/latvia-monthly-briefing-stem-youth-development-drives-fintech-growth-latvia-case-study/>
12. Jonas, N. (2018). *Numeracy practices and numeracy skills among adults* (OECD Education Working Papers, No. 177). OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/8f19fc9f-en>
13. Joutsenlahti, J., & Perkkilä, P. (2019). Sustainability development in mathematics education: A case study of what kind of meanings do prospective class teachers find for the mathematical symbol "2/3"? *Sustainability*, 11(2), Article 457. <https://doi.org/10.3390/su11020457>
14. Kirschner, P. A., Sweller, J., & Clark, R. E. (2006). Why minimal guidance during instruction does not work: An analysis of the failure of constructivist, discovery, problem-based, experiential, and inquiry-based teaching. *Educational Psychologist*, 41(2), 75–86 b. DOI: [10.1207/s15326985ep4102_1](https://doi.org/10.1207/s15326985ep4102_1)
15. Lazonder, A. W., & Harmsen, R. (2016). Meta-analysis of inquiry-based learning: Effects of guidance. *Review of Educational Research*, 86(3), 681–718. <https://doi.org/10.3102/0034654315627366>

16. Meehan, L., Pacheco, G., & Schober, T. (2023). *Basic reading and mathematics skills and the labour market outcomes of young people: Evidence from PISA and linked administrative data* (Economics Working Paper Series No. 2023/01). Auckland University of Technology.
17. Müller, D. (2025). *The mathematisation of the world: Uncovering the socio-economic tensions for ethics in mathematics education* (Working Paper). Auckland University of Technology. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2510.23349>
18. Naidoo, J., & Singh-Pillay, A. (2023). Embedding sustainable mathematics higher education in the Fourth Industrial Revolution era post-COVID-19: Exploring technology-based teaching methods. *Sustainability*, 15(12), Article 9692. <https://doi.org/10.3390/su15129692>
19. OECD. (2024a). *Education at a glance 2024: OECD indicators*. OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/c00cad36-en>
20. OECD. (2024b). *Mathematics for life and work*. OECD Publishing. https://www.oecd.org/en/publications/2024/11/mathematics-for-life-and-work_a951fc0a/full-report/component-4.html
21. Pimpalkar, A., & Karoo, K. (2024). Exploring the applications and advancements in linear algebra: A comprehensive review. *International Journal of All Research Education and Scientific Methods*, 12(7), 1087–1089. <https://doi.org/10.13140/RG.2.2.14341.82409>
22. Rocard, M. (2007). *Science education now: A renewed pedagogy for the future of Europe* (Report). Office for Official Publications of the European Communities. http://ec.europa.eu/research/science-society/document_library/pdf_06/report-rocard-on-science-education_en.pdf
23. Rogovchenko, S., Rogovchenko, Y., & Tretyakova, O. (2021). Inquiry-based tasks with modeling and conceptual questions. In I. M. Gómez-Chacón, R. Hochmuth, S. Rogovchenko, & N. Brouwer (Eds.), *Mathematics for higher education: INDRUM 2020 and PLATINUM open perspectives* (pp. 79–88). Masaryk University Press. <https://doi.org/10.5817/CZ.MUNI.M210-9983-2021-7>
24. Sokołowska, D. (Ed.). (2020). *Volume 1: Inquiry based learning to enhance teaching: Theory, tools and examples*. University of Ljubljana, Faculty of Education. https://ec.europa.eu/programmes/erasmus-plus/project-result-content/cf1a25b1-14ed-4c62-81db-1d4754bb0725/3D_VOLUME1.pdf
25. Song, Y., & Kong, S. C. (2014). Going beyond textbooks: A study on seamless science inquiry in an upper primary class. *Educational Media International*, 51(3), 226-236 DOI:[10.1080/09523987.2014.968450](https://doi.org/10.1080/09523987.2014.968450)
26. United Nations. (2015). *Transforming our world: The 2030 Agenda for Sustainable Development*. <https://sdgs.un.org/2030agenda>
27. Widiati, I., & Juandi, D. (2019). Philosophy of mathematics education for sustainable development. *Journal of Physics: Conference Series*, 1157, Article 022128. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1157/2/022128>