

DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE  
VIDES UN TEHNOLOĢIJU KATEDRA

Diāna Ogorelova

**BIOLOĢISKO TĪKLU DINAMISKIE  
MODEĻI**

PROMOCIJAS DARBA KOPSAVILKUMS  
zinātnes doktora grāda (Ph.D.) Dabaszinātnēs iegūšanai  
(matemātikas nozarē, diferenciālvienādojumu apakšnozarē)

Daugavpils, 2024

Promocijas darbs “Bioloģisko tīklu dinamiskie modeļi” ir izstrādāts Daugavpils Universitātes Vides un tehnoloģiju katedrā laika posmā no 2015. gada līdz 2024. gadam.



Promocijas darbu daļēji atbalstīja projekts: ESF projekta “Daugavpils Universitātes stratēģiskās specializācijas jomu akadēmiskā personāla profesionālās kompetences stiprināšana 3.kārta” Nr. 8.2.2.0/20/I/003.

**Doktora studiju progprogramma:** Matemātika, apakšnozare “Diferenciālvienādojumi”

**Promocijas darba zinātniskais vadītājs:** Professor, Dr.habil.math. Felikss Sadirbajevs, Daugavpils Universitāte, Latvijas Universitātes Matemātikas un informātikas institūts.

# Saturs

<b>VISPĀRĪGA INFORMĀCIJA PAR DARBU</b>	<b>4</b>
<b>1 Ievads</b>	<b>9</b>
<b>2 Gomperca funkcija gēnu regulējošo tīklu modelī</b>	<b>12</b>
2.1 Sistēma . . . . .	13
2.2 Kritisko punktu sistēma . . . . .	14
2.3 Linearizēta sistēma . . . . .	15
2.3.1 Rezultātu apkopošana . . . . .	21
2.4 Mijiedarbība . . . . .	21
2.4.1 A gadījums: Aktivizēšana . . . . .	24
2.4.2 Rezultātu apkopošana . . . . .	26
<b>3 Gēnu un neironu tīklu matemātiskā modelēšana ar parastajiem diferenciālvienādojumiem</b>	<b>26</b>
3.1 Provizoriskie rezultāti . . . . .	29
3.1.1 Invarianta kopa . . . . .	29
3.1.2 Nulles izoklīnas . . . . .	29
3.2 Kritiskie punkti . . . . .	29
3.2.1 Linearizācija kritiskā punkta apkartnē . . . . .	31
3.3 Inhibīcija-aktivizēšana . . . . .	31
<b>4 Sistēmas ar stabiliem periodiskiem atrisinājumiem. Andronova - Hopfa tipa bifurkācijas.</b>	<b>33</b>
4.1 2D gadījums . . . . .	33
4.2 3D gadījums . . . . .	34
4.3 MNT kontrole un vadība . . . . .	35
4.4 Rezultātu apkopošana . . . . .	36
<b>5 Secinājumi</b>	<b>37</b>
<b>LITERATŪRA</b>	<b>38</b>

## VISPĀRĪGA INFORMĀCIJA PAR DARBU

**Promocijas darbs** ir veltīts parasto diferenciālvienādojumu sistēmu izpētei, kas rodas sarežģītu tīklu teorijā. Gēnu regulēšanas tīkli un mākslīgie neironu tīkli ir šāda veida tīkli.

**Atslēgvārdi:** gēnu regulēšanas tīkli, mākslīgie neironu tīkli, matemātiskā modelēšana, fāzes portrets, periodiski atrisinājumi, atraktori.

**Pētījuma objekts:** noteikta parasto diferenciālvienādojumu sistēmu klase. Šīm sistēmām ir īpašas kvazilineāras struktūras, un tās satur gan lineāras, gan nelineāras daļas. Nelineāro daļu attēlo sigmoidālās funkcijas.

**Pētījuma mērķis:** ir izpētīt vienu parasto diferenciālvienādojumu sistēmu klasi, kas rodas gēnu tīklu un mākslīgo neironu tīklu teorijā. Šīs sistēmas sastāv no nelineārām un lineārām daļām. Nelineāro daļu reprezentē sigmoidālās funkcijas, no kurām darbā izmantotas Gomperta funkcija un hiperboliskā tangensa funkcija. Īpaša uzmanība tiek pievērsta atraktoru īpašību izpētei, sistēmu evolūcijas analīzei un risinājumu uzvedības prognozēšanai.

### Pētījuma uzdevumi:

- formulēt parasto diferenciālvienādojumu (PDV) sistēmu modelēšanai un izmantot Gomperta funkciju kā nelinearitāti;
- iegūt ģenētiski regulējošo tīkla (GRT) tipa sistēmu formulas kritisko punktu izpētei;
- salīdzināt rezultātus GRT sistēmām, izmantojot Gomperta funkciju, ar līdzīgām sistēmām, kurās izmanto citas sigmoidālās funkcijas;
- GRT sistēmām iegūtos rezultātus pārnest uz sistēmām, kas rodas mākslīgo neironu tīklu (MNT) teorijā un satur hiperbolisko tangensu kā nelinearitāti;
- salīdzināt iegūtos rezultātus GRT sistēmām ar rezultātiem, kas iegūti MNT sistēmām;

- salīdzināt periodisko atrektoru piemēru rezultātus GRT un MNT sistēmās;
- pierādīt periodisku atrektoru eksistenci GRT un MNT sistēmām, koncentrējoties uz abu sistēmu līdzību;
- pierādīt periodisko atrektoru eksistenci otrās, trešās un augstākās kārtas GRT un MNT sistēmām;
- izpētīt risinājumu sensitīvu atkarību no MNT sistēmām, aprēķinot Ļapunova eksponentes;
- sniegt dažus novērojumus un piezīmes par GRT un MNT sistēmu vadāmības un pārvaldības problēmu.

**Pētījuma metodes:** pētījumā tiek izmantotas dažādas sigmoidālo funkciju analīzes metodes un paņēmieni, piemēram,

- kritisko punktu linearizācija un lokālā analīze;
- periodisku atrektoru konstruēšana, izmantojot Andronova–Hopfa bifurkāciju no stabila fokusa;
- veidot augstākas dimensijas sistēmas, izmantojot maza izmēra blokus, un pēc tam apvienot sistēmas, pievienojot jaunus elementus;
- fāzes plaknes un fāzes telpu ģeometriskā analīze, ņemot vērā izoklīnas;
- fāzu telpas un vektoru lauku analīze, kas saistīti ar GRT un MNT sistēmām, attiecībā uz invariantām kopām;
- risinājumu sensitīvas atkarības noteikšana no GRT un MNT sistēmām, aprēķinot Ļapunova eksponentes;
- plaša skaitlisko eksperimentu izmantošana, pētot GRT un MNT sistēmas.

## GALVENIE REZULTĀTI

Darba rezultāti tika publicēti 14 ([29]-[33], [35]-[41], [43], [54]) zinātniskajos rakstos, no kuriem septiņi ([35], [36], [38], [40], [41], [43], [54]) tika publicēti žurnālos, kas indeksēti SCOPUS, un viens no tiem ([39]) ir publicēts Axiomas MDPI (indeksēts WoS, Q2) žurnālā.

Rezultāti tika paziņoti vairākās dažāda līmeņa konferencēs, tostarp 11 starptautiskajās zinātniskajās konferencēs:

1. Latvijas Universitātes 82. Starptautiskajā zinātniskajā konferencē ar referātu “Remarks on mathematical modeling of gene and neuronal networks” (Rīgā, 2024. gada 23. februārī);
2. Starptautiskajā skaitliskās analīzes un lietišķās matemātikas konferencē 2023 (ICNAAM 2023) ar referātu “On control over system arising in the theory of neuronal networks” (Krēta, Grieķija, 2023. gada 11. - 17. septembris);
3. 26. Starptautiskajā matemātiskās modelēšanas un analīzes konferencē ar referātu “Comparative analysis of models of genetic and neuronal networks” (Jurmālā, 2023. gada 30. maijs - 2. jūnijs);
4. Daugavpils Universitātes 65. Starptautiskajā zinātniskajā konferencē ar referātu “On linearization on some system arising in the theory of neural networks, in the neighborhood of a critical point” (Daugavpilī, 2023. gada 20. aprīlī);
5. Latvijas Universitātes 81. Starptautiskajā zinātniskajā konferencē ar referātu “On computation of parameters in Artificial Neural Networks mathematical models” (Rīgā, 2023. gada 24. februārī);
6. 61. Starptautiskajā konferencē par Vibroinženēriju ar referātu “On a three-dimensional neural network model” (Udaipurā, Indijā, 2022. gada 12. - 13. decembrī);

7. Starptautiskajā starpdisciplināro studiju konferencē Liberty ar referātu “Mathematical modeling of three - dimensional genetic regulatory networks using different sigmoidal functions” (Manhetenā, Ņujorkā, 2022. gada 16. - 17. janvārī);
8. 1. Starptautiskajā simpozijā par jaunākajiem sasniegumiem fundamentālo un lietišķo zinātņu jomā (ISFAS-2021) ar referātu “Mathematical modeling of GRN using different sigmoidal functions” ( Turcijā, 2021. gada 10. - 12. septembrī);
9. Latvijas Universitātes 79. Starptautiskajā zinātniskajā konferencē ar referātu “Andronov - Hopf bifurcation in 2D systems” (Rīgā, 2021. gada 26. februārī);
10. Latvijas Universitātes 78. Starptautiskajā zinātniskajā konferencē ar referātu “Gompertz function in the model of gene regulation network” (Rīgā, 2020. gada 28. februārī);
11. Latvijas Universitātes 77. Starptautiskajā zinātniskajā konferencē ar referātu “Z-shaped isoclines in GRN differential system” (Rīgā, 2019. gada 18. februārī);
12. Latvijas Universitātes 76. Starptautiskajā zinātniskajā konferencē ar referātu “Gompertz sigmoidal function in the 2-component network model” (Rīgā, 2018. gada 23. februārī);
13. Daugavpils Universitātes 60. Starptautiskajā zinātniskajā konferencē ar referātu “Critical points for sigmoidal function” (Daugavpilī, 2018. gada 27. aprīlī);
14. Latvijas 12. matemātikas konferencē ar referātu “Critical points for sigmoidal function” (Ventspilī, 2018. gada 13. - 14. aprīlī);
15. Latvijas 11. matemātikas konferencē ar referātu “Rezonantas problēmas atrisināmības nosacījumi” (Daugavpilī, 2016. gada 14. aprīlī);

16. Daugavpils Universitātes 57. Starptautiskajā zinātniskajā konferencē ar referātu “Dirihlē robežproblēma vienai diferenciālvienādojumu sistēmai” (Daugavpilī, 2015. gada 12. aprīlī);
17. Daugavpils Universitātes 56. Starptautiskajā zinātniskajā konferencē ar referātu “Divu otrās kārtas diferenciālvienādojumu sistēmas Dirihlē robežproblēma” (Daugavpilī, 2014. gada 8. aprīlī).



# 1 Ievads

Šajā darbā aplūkojam problēmas, kas rodas tīklu matemātiskajā modelēšanā. Mēs koncentrējamies uz gēnu regulējošo tīklu un mākslīgo neironu tīklu modelēšanu. Šāda veida tīkli ir visur. Tie sastāv no elementiem, kurus sauc par mezgliem, un saitēm starp mezgliem. Tīklu raksturs var būt atšķirīgs. Tīkli ir sastopami dabā, cilvēku sabiedrībā, burtiski visur. Tie var būt ārkārtīgi lieli, piemēram, astronomisku objektu, zvaigžņu, planētu un galaktiku tīkli. Tajā pašā laikā tie var būt ļoti mazi un pat neatpazīstami, un tos nevar redzēt neapbruņotas acis, piemēram, gēnu tīkli dzīvā organismā. Lai izprastu tīklu uzbūvi un darbības principus dabā, zinātniekiem vajadzētu savākt milzīgus novērojumu rezultātu kopas. Šie dati ir jāapkopo, jāsystematizē, jāanalizē un jāklasificē. Brīžiem tas ir ļoti grūts uzdevums. Lai atvieglotu šo uzdevumu, var izmantot matemātisko modelēšanu. Kā parasti, matemātiskie modeļi ir objekti, kas pastāv virtuālajā matemātikas jomā. Šie objekti jāveido soli pa solim, pārbaudot to atbilstību pētāmajām parādībām. Eksperimenti jāveic modelī, analīze ir matemātiska, un modeļa analīzei izmantojami matemātiskie instrumenti, kas ir standarta vai radīti tieši konkrētam pētījuma objektam. Sekas tiek reģistrētas, systematizētas un klasificētas. Hipotēzes tiek formulētas, lai labāk izprastu pētījuma objektu. Hipotēzes ir jāpārbauda un vai nu jāapstiprina, vai jānoraida.

Vienkāršus tīklus, piemēram, cilvēku grupas, mazas populācijas un vairākus statistiskus objektus, var izpētīt, izmantojot grafu teorijas matemātisko aparātu. Grafi sastāv no virsotnēm, šķautnēm starp virsotnēm un gan virsotņu, gan šķautņu raksturlielumiem. Dažreiz grafus var tieši vizualizēt un analizēt. Liela izmēra tīkliem tas var būt sarežģīts uzdevums. Kā piemēru varētu domāt par transporta tīkliem, industriālo objektu tīkliem utt.

Tīklu struktūra un īpašības laika gaitā var mainīties, un tie ir interesantākie tīkli. Balstoties uz tīkla pagātnes analīzi un zinot tā galvenos

darbības principus, var domāt par tīklu nākotnes stāvokļu prognozēšanu. Atkarībā no tīkla veida tas var būt vissvarīgākais izaicinājums.

Lai to ilustrētu, aplūkosim ģenētiskus tīklus. Ģenētisko tīklu eksistence nebija zināma pirms lielā atklājuma ģenētikas un bioloģijas jomā kopumā. Tagad ir zināms, ka ģenētiskie tīkli atrodas jebkurā dzīvā organisma šūnā. To var iedomāties kā mezglu kopumu, ko sauc par gēniem, kas sazinās savā starpā. Kā tie to dara? Tie sūta ziņojumus proteīnu veidā. Šos ziņojumus pieņem citi gēni, un viss tīkls izstrādā kopīgas reakcijas. Piemēram, ģenētiskais tīkls ir atbildīgs par organisma reakciju uz slimībām. Tie regulē svarīgākos procesus augošā dzīvniekā vai cilvēkā. To darbībai ir izšķiroša nozīme morfoģenēzē, organisma orgānu veidošanās procesā. Ģenētiķu, bioloģu un zoologu izmeklēšanas dēļ plankumi uz leoparda un strēmeles uz tīģeriem un zeburām, šķiet, ir genomikas programmēšanas rezultāts, un šo īpašību veidošanās notiek gēnu tīklu kontrolē.

Vēl viens tīkla piemērs ir milzīgs neironu kopums cilvēka smadzenēs. Neironi pieņem elektriskos signālus no citiem tīkla elementiem un rada savus signālus, kas tiek nodoti tālāk. Kolektīva reakcija, ātra vai nē, atkarībā no situācijas, palīdz cilvēkam veikt viņam ierastās funkcijas, piemēram, darbu, komunikāciju ar sabiedrību, radošu un algoritmiski definētu problēmu risināšanu. Bija pārsteidzoši, ka cilvēks var viegli atpazīt attēlus, kas ir sarežģīts uzdevums robotiem un vadāmām ierīcēm. Šāda veida tīkls pieder pie bioloģiskajiem neironu tīkliem. Joprojām ir daudzas problēmas, kuras cilvēki var atrisināt labāk nekā dators vai cits automāts. Mēģinājumi kopēt cilvēka smadzeņu darbību ir noveduši pie mākslīgiem neironu tīkliem. MNT ir vienību kolekcija, ko sauc par mākslīgajiem neironiem. Šīs vienības ir savienotas. Tie var pārraidīt pieņemtu signālu citām vienībām. Mākslīgais neirons saņem signālus un pēc apstrādes nosūta tos citiem ar to saistītiem neironiem.

Abu veidu tīklu, GRT un MNT, dinamiku var modelēt ar parastajiem diferenciālvienādojumiem. Katrs tīkla elements ir apzīmēts ar  $x_i$ . Ele-

mentu  $x_i$  fiziskā nozīme, protams, atšķiras no GRT un MNT. Matemātika kā fundamentāla zinātne zina daudzus fizikālo, vai mehānisko, vai ķīmisko procesu piemērus, kas pēc būtības ir diezgan atšķirīgi, bet aprakstīti ar līdzīgiem matemātiskajiem modeļiem. Tas attiecas uz GRN un ANN. Abiem ir ierobežots, bet, iespējams, ļoti liels elementu skaits, ko apzīmēsim ar  $x_i$ : katru  $x_i$  var izmērīt ar skaitli (galvenokārt iedomātu), ko apzīmē arī  $x_i$ , bet tas ir atkarīgs no laika,  $x_i(t)$ : tāvad pētnieks nodarbojas ar vairākām funkcijām, kas ir atkarīgas viena no otras.  $x_i(t), i = 1; 2; \dots$  veido fāzu telpu, kas matemātiski ir Eiklīda telpa. Jāapraksta attiecības starp elementiem  $x_i$ . Viens ļoti aptuvens veids, kā to izdarīt, ir definēt tā saukto regulējošo matricu, ko parasti apzīmē ar  $W$ . Tā ir  $n \times n$  matrica, kur  $n$  ir elementu skaits tīklā. Elements  $w_{ij}$  ir skaitlis, kas raksturo elementa  $x_j$  ietekmi uz elementu  $x_i$ . Vienošanās ir tāda, ka matricas  $W$  pozitīvie elementi nozīmē aktivizēšanu, negatīvie nozīmē apspiešanu (sauktu arī par inhibīciju), un nulles vērtība  $w_{ij}$  nozīmē, ka nav nekādas saistības. Kad šie sagatavošanās darbi ir veikti, var izveidot diferenciālvienādojumu sistēmu, kas apraksta tīkla dinamiku, jo funkcijas  $x_i(t)$  mainās laikā, ievērojot noteikumus, ko nosaka parasto diferenciālvienādojumu sistēma. PDV relatīvās sistēmas izpētes lielā nozīme ir tāda, ka var izmantot matemātisko aparātu šādu sistēmu izpētei un prognozēt risinājumu  $x_i(t)$  uzvedību, kas šobrīd tiek uzskatīti par risinājumiem parasto diferenciālvienādojumu sistēmā. Iepriekš minētās sistēmas tika definētas gēnu regulēšanas tīkliem un makslīgo neironu tīkliem. Aplūkojot šīs sistēmas, mēs novērojam zināmu līdzību. Tas nozīmē, ka šīs sistēmas var pētīt vienlaicīgi, un iegūtos rezultātus par GRT sistēmām var izmantot MNT sistēmu pētīšanai un otrādi.

Tas ir dotā darba galvenais virziens.

## 2 Gomperca funkcija gēnu regulējošo tīklu modelī

Gēnu regulējošo tīklu teorijā diferenciālās sistēmas ir šādā veidā

$$x'_i = f(\sum w_{ij}x_j) - x_i. \quad (2.1)$$

Šī sistēma apraksta gēnu tīkla elementu (gēnu) savstarpējo sakarību. Mēs izlaižam šīs savstarpējās attiecības mehānismu un koncentrējamies uz matemātisko aspektu. Funkcija  $f(z)$  šajā modelī ir nepārtraukta, ierobežota, monotoni augoša funkcija (to sauc par *sigmoidālo regulējošo funkciju*). Matrica  $W$  sastāv no elementiem, kas apraksta attiecības starp tīklu mezgliem. Ir dažādas funkcijas  $f(z)$ , kurām ir vēlamās īpašības. Piemēram, funkcija  $f(z) = \frac{1}{1+e^{-\mu z}}$  atbilst prasībām. Arguments  $z$  tiek aizstāts ar  $z = \sum w_{ij}x_j - \theta$ , un tas atspoguļo gēna ievadi ar sliekšni  $\theta$   $x_i$  palielināšanai. No sākuma apskatīsim  $2 \times 2$  matricu  $W$ , tā sastāv no elementiem, kas ņem vērtības no kopas  $\{-1, 0, 1\}$ . Šāda veida sistēmas parādās gēnu regulēšanas teorijā. Tiek pētīta atrektoru struktūra.

Sistēma (2.1), kas satur  $n$  vienādojumus, apraksta mākslīgā tīkla dinamiku, kas sastāv no  $n$  elementiem. Tīkla elementu savstarpējo sakarību apraksta regulējošā matrica  $W$ . Pozitīvais elements  $a_{ij}$  nozīmē  $i$ -tā elementa aktivizēšanu ar  $j$ -to elementu. Elementa  $w_{ij}$  negatīva vērtība nozīmē inhibīciju, un nulles elements nozīmē, ka nav attiecības. Elementa absolūtā vērtība nozīmē savstarpējās attiecības intensitāti.

Šajā darbā mēs aplūkojam tikai divdimensiju gadījumu (tīklu ar diviem elementiem). Regulējošā matrica, kas atbilst aktivizēšanai, ir

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

un šis gadījums tika detalizēti izpētīts. Inhibīcijas matrica ir

$$W = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

un sistēmas (2.2) uzvedība šajā gadījumā ir vispārzināma. Abos gadījumos atraktori ir stabili kritiskie punkti (stabili mezgli), un kritisko punktu skaits ir ne vairāk kā trīs.

Sistēma formā (2.2) parādās gēnu regulēšanas teorijā [2]. Tika minēts, ka šādas struktūras sistēma var rasties arī telekomunikāciju tīklu teorijā. Tad elementi  $x_1, x_2, \dots$  apzīmē saziņas ķermeņu pārus, un regulējošo matricu elementi var atšķirties pēc absolūtām vērtībām un zīmēm.

Mēs vēlamies izskatīt visus gadījumus. Tāpēc mēs pieļaujam jebkurus elementus  $W$ . Tika konstatēts, ka tad kritisko punktu skaits var palielināties. Mēs sniedzam pilnu iespējamo uzvedības veidu klasifikāciju. Turklāt mēs sniedzam piemērus dažādām matricām  $W$ , attiecīgajām kritisko punktu kopām un to raksturotājiem. Ja iespējams, tiek nodrošināts tipisks fāzes portrets.

## 2.1 Sistēma

Divkomponentu gēnu regulēšanas tīklus apraksta diferenciālā sistēma

$$\begin{cases} x'_1 = f(w_{11}x_1 + w_{12}x_2 - \theta_1) - x_1, \\ x'_2 = f(w_{21}x_1 + w_{22}x_2 - \theta_2) - x_2, \end{cases} \quad (2.2)$$

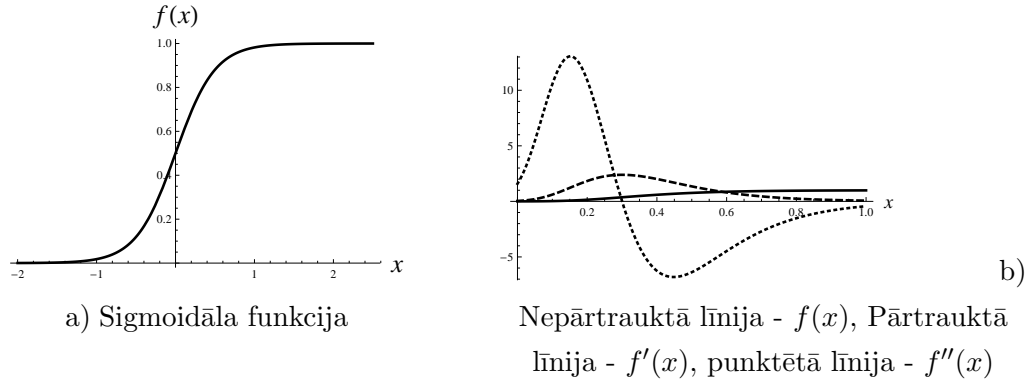
kur  $f(x)$  ir sigmoidāla funkcija.

**1. definīcija.** *Funkcija tiek saukta par sigmoidālu, ja izpildās šādi nosacījumi.*

1.  $f(x)$  monotoni palielinās no 0 līdz 1,  $x \in \mathbb{R}$ ;
2. Tam ir tieši viens pārliekuma punkts.

Viens sigmoidālās funkcijas piemērs ir loģistikas funkcija  $f(z) = \frac{1}{1+e^{-\mu z}}$ . Šī funkcija tiek izmantota matemātiskajos modeļos, kas pētīti darbos [7], [9], [22].

Vēl viens sigmoidālās funkcijas piemērs ir Gomperca (Gompertz) funkcija, un mēs to pētīsim šajā darbā. Sigmoidāla funkcija  $f(x)$ , tās pirmā  $f'(x)$  un otrā  $f''(x)$  atvasinājuma grafiki tiek attēloti 2.1(b) attēlā ar parametru  $\mu = 6,5$  un  $\theta = 0,3$  vērtībām. To ierobežo 1, un tā monotoni pieaug.



## 2.1. zīm.

Apskatīsim Gomperca funkciju  $f(z) = e^{-e^{-\mu z}}$ . Šī funkcija ir sigmoidāla pēc 1. definīcijas.

Sistēma paplašinātā formā ir

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = e^{-e^{-\mu(w_{11}x_1 + w_{12}x_2 - \theta_1)}} - x_1, \\ \frac{dx_2}{dt} = e^{-e^{-\mu(w_{21}x_1 + w_{22}x_2 - \theta_2)}} - x_2, \end{cases} \quad (2.3)$$

kur  $\mu$  un  $\theta$  ir pozitīvi parametri. Mūsu mērķis ir izpētīt šīs sistēmas fāzes portretu un atrektoru kopas.

## 2.2 Kritisko punktu sistēma

Tiek pieņemts, ka  $f(z)$  ir atkarīgs arī no parametra  $\mu$ , kas regulē  $f$  grafika stāvumu. Mēs vēlamies norādīt vispārīgās sistēmas (2.3) īpašības.

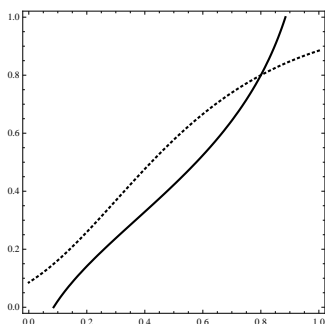
Šīs sistēmas kritiskie punkti ir sistēmas (2.4) atrisinājumi

$$\begin{cases} 0 = e^{-e^{-\mu(x_2 - \theta)}} - x_1, \\ 0 = e^{-e^{-\mu(x_1 - \theta)}} - x_2. \end{cases} \quad (2.4)$$

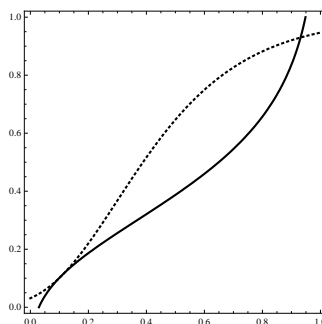
**1. lemma.** *Jebkuram kritiskajam punktam ir forma  $(x, x)$ . Tāpēc kritiskā punkta koordināta  $x$  tiek noteikta no*

$$x = f(x). \quad (2.5)$$

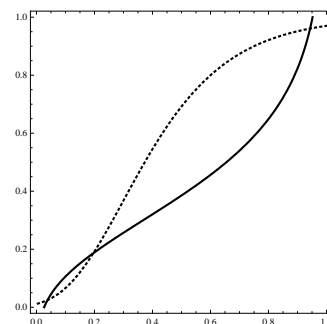
Grafiki  $y = f(x)$  un  $y = f^{-1}(x)$  ir parādīti 2.2. zīmējumā.



a)  $\theta = 0.3, \mu = 0.3,$   
1 kritiskais punkts



b)  $\theta = 0.3, \mu \approx 4.15,$   
2 kritiskie punkti



c)  $\theta = 0.3, \mu = 5,$   
3 kritiskie punkti

## 2.2. zīm.

Nevienādība  $\mu < e$ , kur  $e = 2,7182818284\dots$ , tiek attēlota 2.2.(a). zīmējumā, savukārt nevienādību  $\mu > e$  tiek attēlota 2.2.(c). zīmējumā.

Ir skaidrs, ka dažām parametru vērtībām ir tieši viens kritiskais punkts un dažām  $\mu$  un  $\theta$  vērtībām ir trīs punkti. Kā starpstāvoklis mums ir 2.2.(b). zīmējumā ar tieši diviem kritiskajiem punktiem. Mūsu mērķis ir noskaidrot, kuras parametru vērtības atbilst 1, 2 vai 3 kritiskajiem punktiem.

## 2.3 Linearizēta sistēma

Linearizēta sistēma ap iespējamo kritisko punktu  $(x_1, x_2)$  ir

$$\begin{cases} u' = -u + \mu e^{-e^{-\mu(x_2-\theta)} - \mu(x_2-\theta)} \cdot v, \\ v' = \mu e^{-e^{-\mu(x_1-\theta)} - \mu(x_1-\theta)} \cdot u - v. \end{cases} \quad (2.6)$$

Tā kā  $x_1 = x_2$ , sistēma izskatās

$$\begin{cases} u' = -u + \mu e^{-e^{-\mu(x-\theta)} - \mu(x-\theta)} \cdot v, \\ v' = \mu e^{-e^{-\mu(x-\theta)} - \mu(x-\theta)} \cdot u - v. \end{cases} \quad (2.7)$$

Tāpēc, ņemot vērā formulu (2.4) un 1. lemmu, jebkura kritiskā punkta  $(x, x)$  koordināta  $x$  atbilst

$$\begin{aligned} x &= e^{-e^{-\mu(x-\theta)}}, \\ -\ln(x) &= e^{-\mu(x-\theta)}. \end{aligned}$$

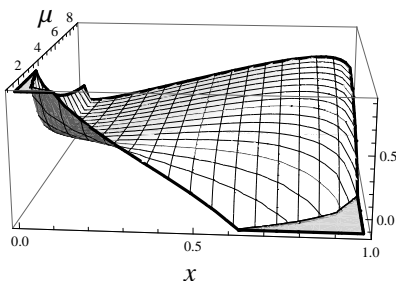
Apskatīsim  $a = \mu e^{-e^{-\mu(x-\theta)}} - \mu(x-\theta) = \mu x(-\ln(x))$ , tad

$$\begin{cases} u' = -u + a \cdot v, \\ v' = a \cdot u - v. \end{cases} \quad (2.8)$$

Mēs iegūstam no  $x = e^{-e^{-\mu(x-\theta)}}$  ar logaritmēšanu  $\ln(-\ln(x)) = -\mu(x-\theta)$ . Attiecībā uz  $\theta$  un  $x \in (0, 1)$  mēs iegūstam formulu (2.9)

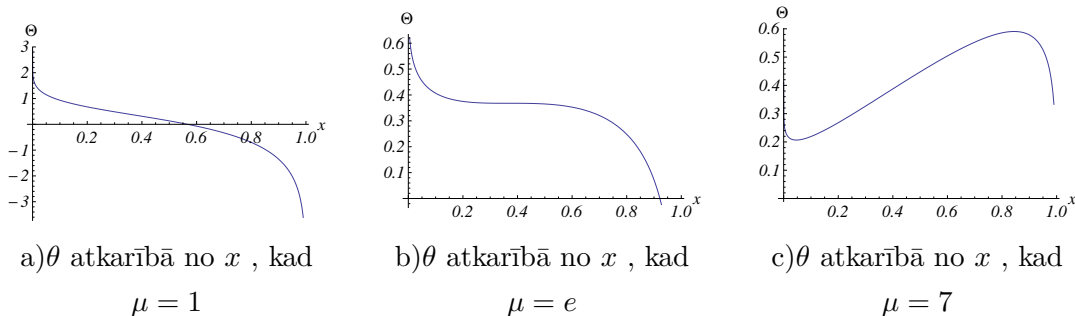
$$\theta = x + \frac{1}{\mu} \ln(-\ln(x)). \quad (2.9)$$

Funkcijas  $\theta$  (2.9) grafiks tiek attēlots 2.3. zīmējumā.



2.3. zīm.  $\theta$  atkarība kritiskajam punktam  $(x, x)$  no  $\mu$ .

2.4. zīmējumā tiek vizualizēta  $\theta$  atkarība dažādam  $\mu$  vērtībam. Redzams, ka dažiem  $\mu$  un  $\theta$  ir attiecīgi viens, divi vai trīs kritiskie punkti.



### 2.4. zīm.

Apskatīsim otro un trešo attēlu 2.4. zīmējumā. Ir intervāls, kurā  $\theta(x)$  palielinās. Analizēsim šo.

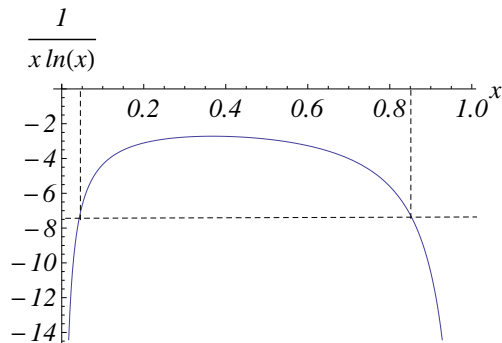


Tātad

$$\theta'(x) = 1 + \frac{1}{\mu} \frac{1}{x \ln x} \quad (2.10)$$

un  $\theta'(x) = 0$ , ja

$$\frac{1}{x \ln x} = -\mu. \quad (2.11)$$



### 2.5. zīm. $\frac{1}{x \ln x}$ grafiks

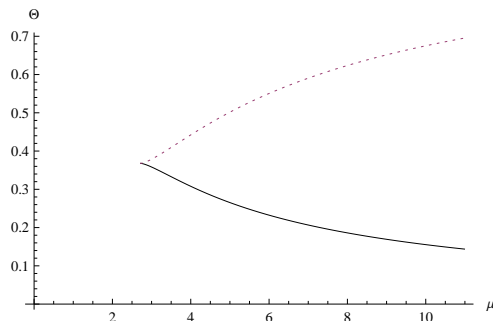
Funkcija  $\theta'(x) > 0$ , ja  $\frac{1}{x \ln x} > -\mu$ . Apzīmēsim vienādojuma (2.11) atrisinājumus ar  $x_1(\mu)$  un  $x_2(\mu)$  attiecīgi. Horizontālā punktētā līnija 2.5. zīmējumā attiecas uz  $-\mu$  un divas vertikālās pārtrauktas līnijas attiecas uz  $x_1(\mu)$  un  $x_2(\mu)$ .

Apskatīsim

$$\theta_1(\mu) = x_1(\mu) + \frac{1}{\mu} \ln(-\ln(x_1(\mu)))$$

un

$$\theta_2(\mu) = x_2(\mu) + \frac{1}{\mu} \ln(-\ln(x_2(\mu))).$$



### 2.6. zīm. $\theta_1(\mu)$ un $\theta_2(\mu)$ grafiki kopā.

Apgabals  $\Omega$  starp  $\theta_1(\mu)$  (apakšējā atzara) un  $\theta_2(\mu)$  (augšējā atzara) atbilst trim sistēmas kritiskajiem punktiem, tas ir,  $(\mu, \theta) \in \Omega$  ir tieši trīs

kritiskie punkti.

Linearizētajai sistēmai (2.7) raksturīgais vienādojums ir

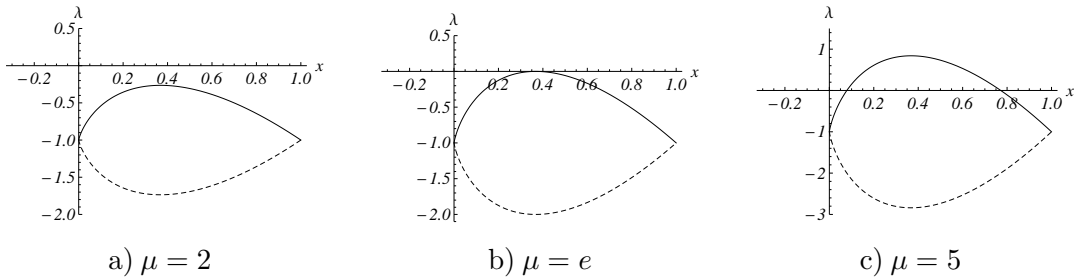
$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & a \\ a & -1 - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & \mu x(-\ln(x)) \\ \mu x(-\ln(x)) & -1 - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-1 - \lambda)^2 - \mu^2 x^2 (-\ln(x))^2 = 0 \quad (2.12)$$

vai  $\lambda = -1 \pm a$ . Tāpēc  $\lambda_1 = -1 - a$  vienmēr ir negatīvs un  $\lambda_2 = -1 + a$ . Ir trīs kritisko punktu iespējas:

1. Ja  $\lambda_2 < 0$ , tad  $(x, x)$  ir stabils mezgls;
2. Ja  $\lambda_2 = 0$ , tad  $(x, x)$  ir stabils deģenerēts punkts;
3. Ja  $\lambda_2 > 0$ , tad  $(x, x)$  ir sedlu punkts.

Raksturīgā vienādojuma (2.12) saknes atkarībā no  $x$  un  $x = e^{-e^{-\mu(x-\theta)}}$  atkarībā no  $\theta$  (dotam  $\mu$ ) tiek attēlotas 2.7. zīmējumā, kur a) gadījumā  $\mu \in (0, e)$ , b) gadījumā  $\mu = e$  un c) gadījumā  $\mu \in (e, +\infty)$ . Nepārtraukta līnija ir  $\lambda_2 = -1 + \mu x(-\ln(x))$ , pārtraukta līnija ir  $\lambda_1 = -1 - \mu x(-\ln(x))$ .



## 2.7. zīm.

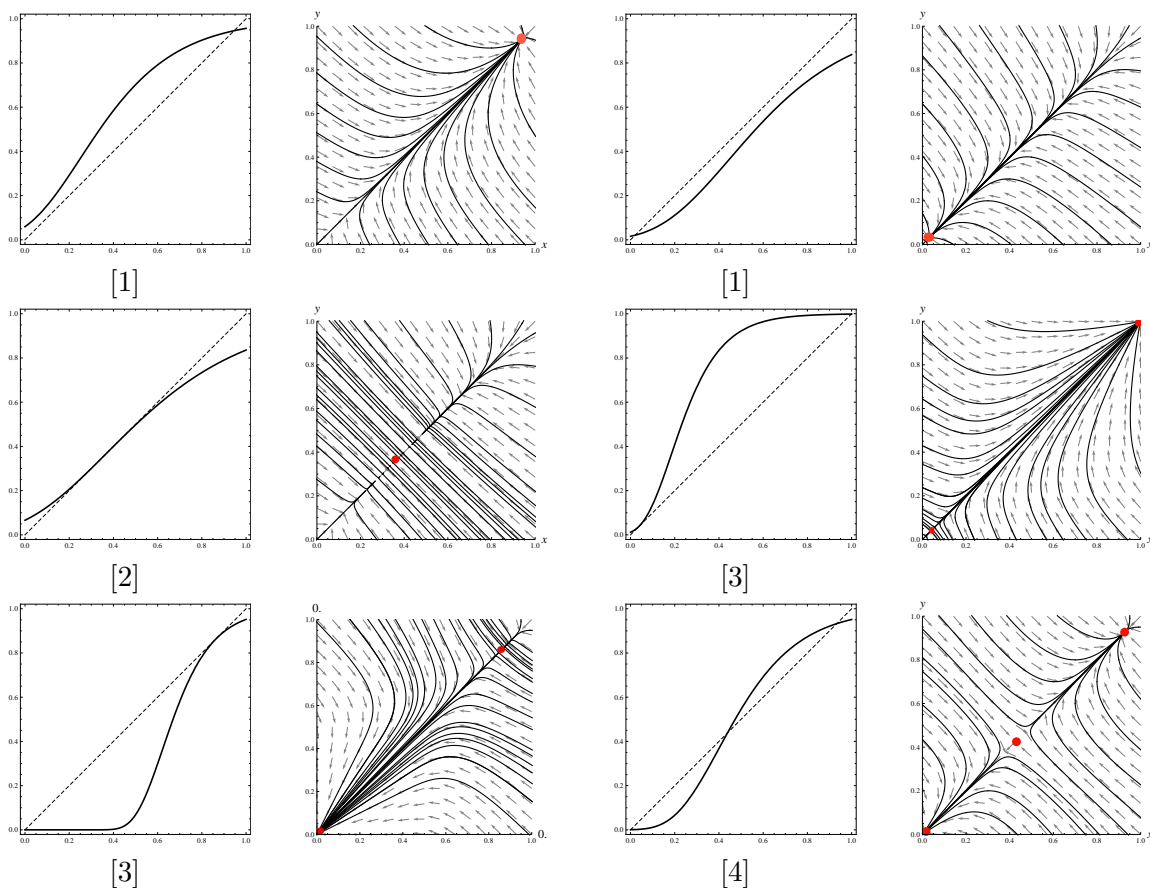
Mēs novērojām, ka sistēmas (2.2) atraktori ir vai nu stabili mezgli, vai deģenerēti punkti ar  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 = 0$ .

**1. apgalvojums.** Sistēmai (2.2) nevar būt fokusa tipa kritiskie punkti. No (2.3) izriet, ka  $\lambda = -1 \pm \mu x(-\ln(x))$  un  $\lambda$  nevar būt komplekss skaitlis.

**1. teorēma.** Sistēmai (2.2) ir četri gadījumi:

1. Eksistē tieši viens stabila mezgla tipa kritiskais punkts.

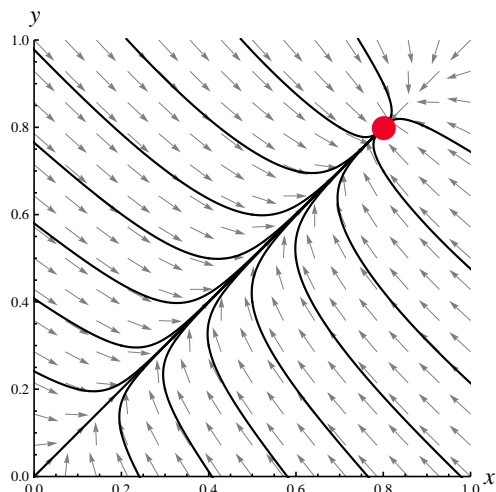
2. Eksistē vienīgais kritiskais punkts ar  $\lambda_1 < 0, \lambda_2 = 0$ . Tas ir deģenerēts stabils kritiskais punkts.
3. Ir tieši divi kritiskie punkti, viens no tiem ir stabils mezgls, otrs ir deģenerēts stabils kritiskais punkts.
4. Ir tieši trīs kritiskie punkti. Sānu kritiskie punkti ir stabili mezgli, viduspunkts ir sedlu punkts.



2.8. zīm. 1. teorēmas vizualizācija.

### 1. piemērs.

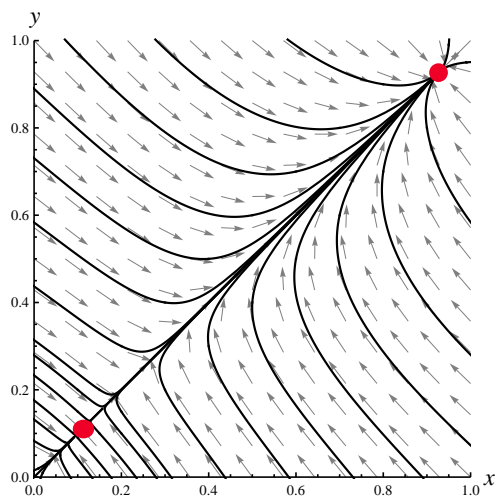
Aplūkosim  $\mu = 3$  un  $\theta = 0.3$ . Ir attiecīgi viens kritiskais punkts  $(0.8, 0.8)$ . Sistēmas (2.3) fāzu portrets vienam kritiskajam punktam ir



2.9. **zīm.** Kritiskais punkts ir stabils mezgls ( $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ ).

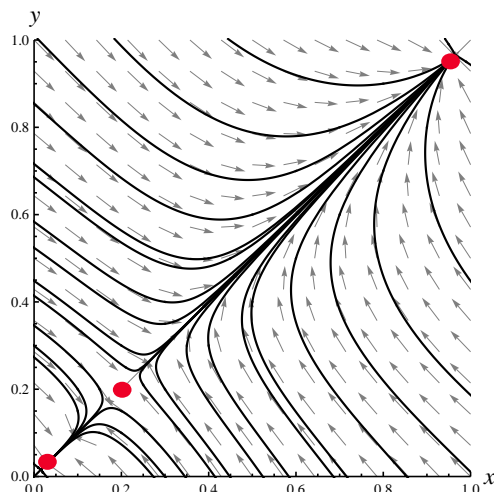
### 2. piemērs.

Aplūkosim  $\mu = 4.15$  un  $\theta = 0.3$ . Ir divi kritiskie punkti attiecīgi  $(0.93, 0.93)$  un  $(0.11, 0.11)$ . Sistēmas (2.3) fāzu portrets diviem kritiskajiem punktiem ir



2.10. **zīm.** Pirmais punkts ir deģenerēts stabils kritiskais punkts, otrais ir stabils mezgls.

3. **piemērs.** Aplūkosim  $\mu = 5$  un  $\theta = 0.3$ . Ir attiecīgi trīs kritiskie punkti  $(0.02, 0.02)$ ,  $(0.21, 0.21)$ ,  $(0.96, 0.96)$ . Sistēmas (2.3) fāzu portrets trim kritiskajiem punktiem ir



2.11. **zīm.** Sānu kritiskie punkti ir stabili mezgli, viduspunkts ir sedlu punkts.

### 2.3.1 Rezultātu apkopošana

Mēs esam definējuši apgabalu  $\Omega$  plaknē  $(\mu, \theta)$  ar šādām īpašībām:

- ja  $(\mu, \theta) \in \Omega$  tad ir tieši trīs kritiskie punkti ar šādām īpašībām - divi sānu kritiskie punkti ir stabili mezgli, vidējais (centrālais) punkts ir sedlu punkts;
- ja  $(\mu, \theta) \in \partial\Omega$ , tad ir tieši divi kritiskie punkti ar īpašībām - pirmais kritiskais punkts ir stabils mezgls, otrs ir deģenerēts punkts ( $\lambda_1 < 0, \lambda_2 = 0$ );
- ja  $(\mu, \theta) \in Q \setminus \bar{\Omega}$  tad ar īpašību ir tieši viens kritiskais punkts - tas ir stabils mezgls;
- $\partial\Omega$  apakšējo un augšējo atzaru kopīgais punkts atbilst vienīgajam kritiskajam punktam ar  $\lambda_1 < 0, \lambda_2 = 0$ , kas attēlots 2.15. zīmējumā [2].

## 2.4 Mijiedarbība

Mijiedarbības veidu raksturo tā sauktā regulējošā matrica  $W = (w_{ij})$ . Regulējošās matricas elementiem var būt jebkuras vērtības. Parasti sistēma, kas modelē gēnu regulējošo tīklu mijiedarbību un evolūciju, ir (2.3), kur  $f(z)$  ir sigmoidāla funkcija. Atkarībā no  $\theta_i$  parametriem un no regulējošās matricas elementiem  $w_{ij}$

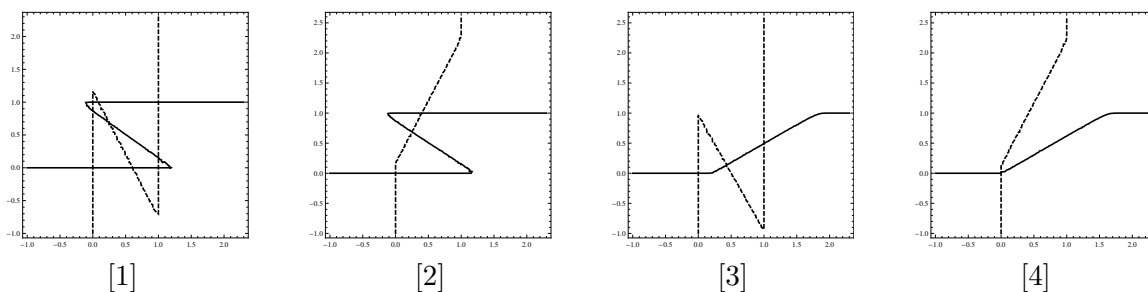
$$W = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix}.$$

pastāv četri mijiedarbības veidi.

**A gadījums: Aktivizēšana.** Regulējošā matrica šim gadījumam ir formā

$$W = \begin{pmatrix} * & + \\ + & * \end{pmatrix},$$

kur elementi  $w_{12}$  un  $w_{21}$  ir pozitīvi, bet elementiem  $w_{11}$  un  $w_{22}$  var būt jebkura vērtība.

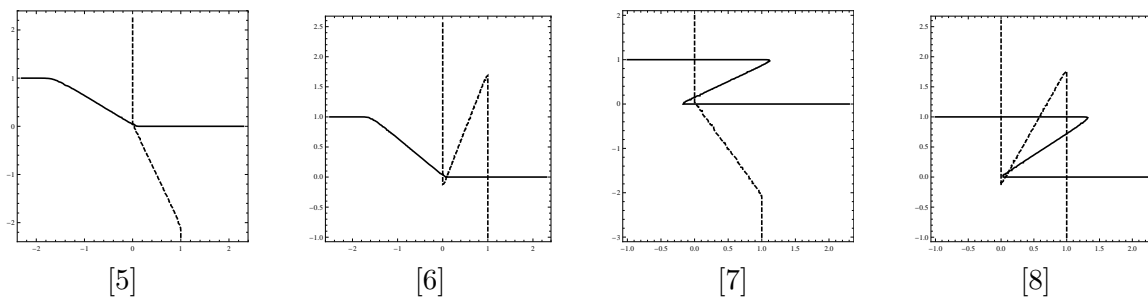


2.12. **zīm.** Visu aktivizēšanas gadījumu vizualizācija.

**B gadījums: Inhibīcija.** Regulējošā matrica šim gadījumam ir formā

$$W = \begin{pmatrix} * & - \\ - & * \end{pmatrix},$$

kur elementi  $w_{12}$  un  $w_{21}$  ir negatīvi, bet elementiem  $w_{11}$  un  $w_{22}$  var būt jebkura vērtība.

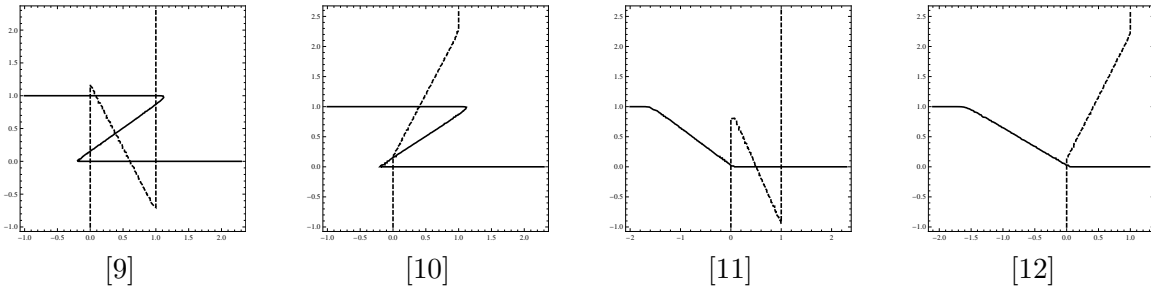


2.13. **zīm.** Visu inhibīcijas gadījumu vizualizācija.

**C gadījums: Aktivizēšana - Inhibīcija.** Regulējošā matrica šim gadījumam ir formā

$$W = \begin{pmatrix} * & + \\ - & * \end{pmatrix},$$

kur elements  $w_{12}$  ir pozitīvs un  $w_{21}$  ir negatīvs, bet elementiem  $w_{11}$  un  $w_{22}$  var būt jebkura vērtība.

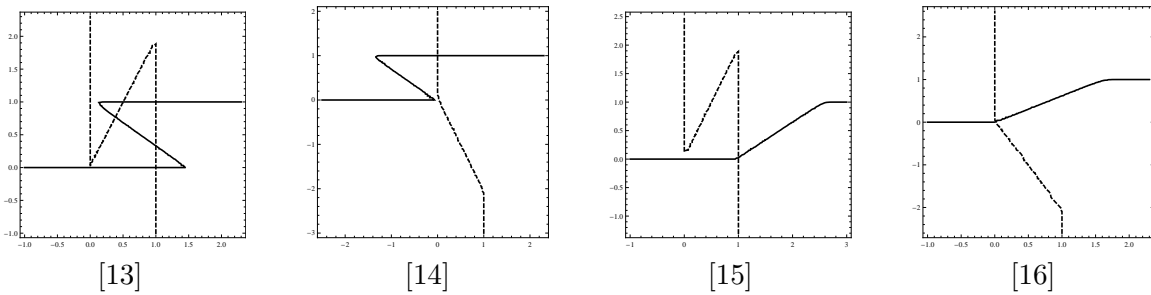


2.14. **zīm.** Visu aktivizēšanas - inhibīcijas gadījumu vizualizācija.

**D gadījums: Inhibīcija - Aktivizēšana.** Regulējošā matrica šim gadījumam ir formā

$$W = \begin{pmatrix} * & - \\ + & * \end{pmatrix},$$

kur elements  $w_{12}$  ir negatīvs un  $w_{21}$  ir pozitīvs, bet elementiem  $w_{11}$  un  $w_{22}$  var būt jebkura vērtība.



2.15. **zīm.** Visu inhibīcijas - aktivizēšanas gadījumu vizualizācija.

Ja  $\mu$  ir pietiekami liels, GRT diferenciālās sistēmas izoklīnam ir Z forma. Parametrs  $\mu$  ir atbildīgs par Z leņķa asumu. Parametrs  $\theta$  ir atbildīgs par sigmoīdālās funkcijas grafika nobīdi, bet regulējošās matricas  $w_{ij}$  elementi ir atbildīgi par figurālo formu.

## 2. apgalvojums. Funkcijai

$$x_1 = f(w_{11}x_1 + w_{12}x_2 - \theta_1) \tag{2.13}$$

izpildās

$$x_2 \rightarrow +\infty, \quad x_1 = f(w_{11}x_1 + w_{12}x_2 - \theta_1) \rightarrow 1;$$

$$x_2 \rightarrow -\infty, \quad x_1 = f(w_{11}x_1 + w_{12}x_2 - \theta_1) \rightarrow 0.$$

**3. apgalvojums.** Funkcijai

$$x_2 = f(w_{21}x_1 + w_{22}x_2 - \theta_2) \quad (2.14)$$

izpildās

$$x_1 \rightarrow +\infty, \quad x_2 = f(w_{21}x_1 + w_{22}x_2 - \theta_2) \rightarrow 1;$$

$$x_1 \rightarrow -\infty, \quad x_2 = f(w_{21}x_1 + w_{22}x_2 - \theta_2) \rightarrow 0.$$

**Secinājums.** Sistēmai (2.2) eksistē vismaz viens kritiskais punkts.

**4. apgalvojums.** Sistēmai (2.2) visi kritiskie punkti  $(x, y)$  atrodas apgabalā  $(0, 1) \times (0, 1)$ .

**5. apgalvojums.** Sistēmai (2.2) izoklīnu pieskares punktos viens raksturīgais skaitlis ir nulle.

#### 2.4.1 A gadījums: Aktivizēšana

Mēs aplūkojam maksimālo kritisko punktu (līdzsvara stāvokļu) skaitu, piemēram, gadījumā ar regulējošo matricu  $W = \begin{pmatrix} + & + \\ + & + \end{pmatrix}$ .

Sigmoidālajai funkcijai  $f = e^{-e^{-\mu z}}$  un konkrētajai regulējošās matricas izvēlei  $W = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$  sistēma ir

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = e^{-e^{-\mu(10x_1+5x_2-\theta_1)}} - x_1, \\ \frac{dx_2}{dt} = e^{-e^{-\mu(2x_1+3x_2-\theta_2)}} - x_2. \end{cases} \quad (2.15)$$

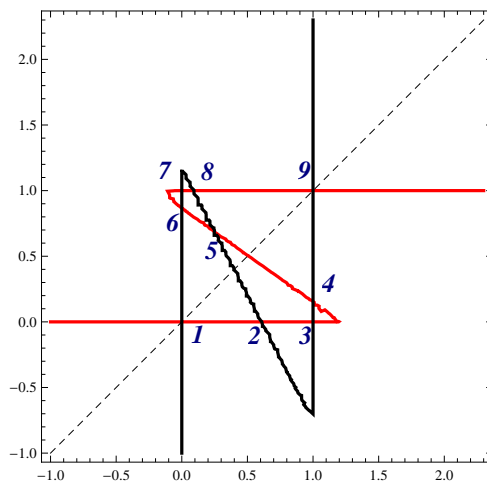
Tiek pieņemts, ka  $f(z)$  ir atkarīgs arī no parametra  $\mu$ , kas regulē  $f$  grafika stāvumu. Mēs vēlamies norādīt sistēmas (2.15) vispārīgās īpašības.

Šīs sistēmas kritiskie punkti ir sistēmas (2.16) atrisinājumi

$$\begin{cases} x_1 = e^{-e^{-\mu(10x_1+5x_2-\theta_1)}}, \\ x_2 = e^{-e^{-\mu(2x_1+3x_2-\theta_2)}}. \end{cases} \quad (2.16)$$



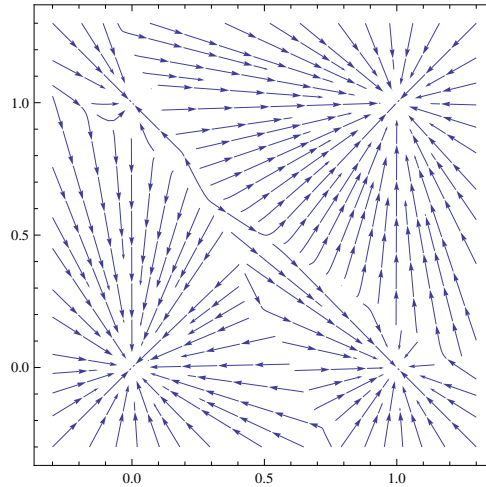
Sistēmas (2.15) divas izoklīnas ir attēlotas 2.16. zīmējumā.



2.16. **zīm.** Sistēmas (2.15) grafiks deviņiem kritiskajiem punktiem:  $\mu = 20$ ,  $\theta_1 = 6$ ,  $\theta_2 = 2.5$ ,  $w_{11} = 10$ ,  $w_{12} = 5$ ,  $w_{21} = 2$ ,  $w_{22} = 3$ .

- 1. kritiskā punkta  $(0, 0)$  veids ir stabils mezgls ( $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1$ ).
- 2. kritiskā punkta  $(0.6, 0)$  veids ir sedlu punkts ( $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 59.96$ ).
- 3. kritiskā punkta  $(1, 0)$  veids ir stabils mezgls ( $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1$ ).
- 4. kritiskā punkta  $(1, 0.16)$  veids ir sedlu punkts ( $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 16.41$ ).
- 5. kritiskā punkta  $(0.26, 0.67)$  veids ir nestabils mezgls ( $\lambda_1 = 75.3, \lambda_2 = 8.8$ ).
- 6. kritiskā punkta  $(0, 0.87)$  veids ir sedlu punkts ( $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 6.5$ ).
- 7. kritiskā punkta  $(0, 0.99)$  veids ir stabils mezgls ( $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -0.99$ ).
- 8. kritiskā punkta  $(0.1, 0.99)$  veids ir sedlu punkts ( $\lambda_1 = -0.99, \lambda_2 = 43.9$ ).
- 9. kritiskā punkta  $(1, 1)$  veids ir stabils mezgls ( $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -0.9$ ).

Lai apstiprinātu analīzes rezultātus, sniedzam sistēmas (2.15) fāzu portretu.



2.17. **zīm.** Sistēmas (2.15) fāzu portrets deviņiem kritiskajiem punktiem:  $\mu = 20$ ,  $\theta_1 = 6$ ,  $\theta_2 = 2.5$ ,  $w_{11} = 10$ ,  $w_{12} = 5$ ,  $w_{21} = 2$ ,  $w_{22} = 3$ .

B, C un D gadījumus var aplūkot līdzīgi.

#### 2.4.2 Rezultātu apkopošana

Vienkāršā divdimensiju diferenciālvienādojumu sistēmā, kas modelē divu elementu tīklu, ir iespējami deviņi kritiskie punkti. Šajā gadījumā kritisko punktu kopa sastāv no četriem stabiliem mezgliem, četriem sedlu punktiem un viena nestabila mezgla. Atraktors šai sistēmai izvēlētajām parametru vērtībām sastāv no četriem kritiskajiem punktiem (1, 3, 7, 9).

### 3 Gēnu un neironu tīklu matemātiskā modelēšana ar parastajiem diferenciālvienādojumiem

Šajā darbā mēs pētām neironu tīklus, ko sauc arī par mākslīgajiem neironu tīkliem, un to matemātiskos modeļus, izmantojot parastos diferenciālvienādojumus. MNT izpētes motivācija bija mēģinājumi izprast cilvēka smadzeņu darbības principus un organizāciju. Radās izpratne, ka cilvēka smadzenes darbojas savādāk nekā digitālie datori. Tās efektīvāti nosaka augstā sarežģītība, nelineārs regulēšanas veids un darbību paralēlisms. Cilvēka smadzeņu elementus sauca par *neironiem*. Šie elementi veic aprēķinus vēl ātrāk nekā ātrākie digitālie datori. Cilvēka smadzenes spēj uztvert informāciju par vidi attēlu veidā, turklāt tās spēj apstrādāt saņemto informāciju, kas nepieciešama mijiedarbībai ar vidi.

Piedzimstot cilvēka smadzenēm ir gatava mācīšanās struktūra, kas pazīstamos terminos tiek saprasta kā pieredze. Tātad neironu tīkli ir paredzēti, lai modelētu veidu, kādā cilvēka smadzenes risina parastas problēmas un veic noteiktu uzdevumu. Īpaša interese par MNT ir saistīta ar faktu, ka svarīga neironu tīklu grupa veic uzdevumus, kas nepieciešami, lai mācību procesā atrisinātu problēmu aprēķinus. Tātad, sekojot [18], MNT var iedomāties kā paralēli izplatītu procesoru, kas sastāv no vienkāršām apstrādes vienībām, kas spēj iegūt pieredzes zināšanas un padarīt tās pieejamas lietošanai.

Mākslīgie neironu tīkli sastāv no vairākiem savienotiem elementiem. “Katram neironam ir sigmoīdu pārnese funkcija un nepārtraukta, pozitīva un ierobežota izvades aktivitāte, kas attīstās atbilstoši tīklos veikto darbību svērtajām summām. Neironu tīklus ar patvaļīgiem savienojumiem bieži sauc par rekurentiem tīkliem” [12]. Joprojām nav izvirzīti nekādi nosacījumi sinaptisko vērtību ierobežošanai. Pastāv divu veidu atkārtotie neironu tīkli: diskrēta laika atkārtoti neironu tīkli un nepārtraukta laika tīkli. Nepārtrauktā laika atkārtotā neironu tīkla dinamiku ar  $n$  vienībām var aprakstīt ar parasto diferenciālvienādojumu sistēmu [16])

$$x'_i = -b_i x_i + f_i(\sum a_{ij} x_j) + I_i(t), \quad (3.1)$$

kur  $x_i$  ir  $i$ -tās vienības iekšējais stāvoklis,  $b_i$  ir  $i$ -tās vienības laika konstante,  $a_{ij}$  ir savienojuma svāri,  $I_i(t)$  ir  $i$ -tās vienības ievade, un  $f_i(\sum a_{ij} x_j)$  ir  $i$ -tās vienības atbildes funkcija. Parasti  $f$  tiek uzskatīta par sigmoidālu funkciju. Ir noteiktas atbildes funkcijas, kas nav negatīvas. Piemēram, [14] tika izmantotas funkcijas  $f_i(z) = (1 + \exp(\mu_i(z - \theta_i)))^{-1}$ . Vispārīgākus gadījumus sistēma var modelēt, izmantojot funkciju  $f_i(z) = \tanh(a_i z - \theta_i)$ , kas ņem vērtības atvērtajā intervālā  $(-1, 1)$ . Ja rekurentie neironu tīkli bez ievades tiek izskatīti, var apskatīt sistēmu

$$x'_i = f_i(\sum(a_{ij} x_j - \theta_i)) - b_i x_i. \quad (3.2)$$

Matemātiskais modelis, izmantojot parastos diferenciālvienādojumus, ir

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 2 \frac{1}{1 + e^{(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 - \theta_1)}} - 1 - b_1 x_1, \\ \frac{dx_2}{dt} = 2 \frac{1}{1 + e^{(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 - \theta_2)}} - 1 - b_2 x_2, \\ \frac{dx_3}{dt} = 2 \frac{1}{1 + e^{(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 - \theta_3)}} - 1 - b_3 x_3. \end{cases} \quad (3.3)$$

To pašu sistēmu var uzrakstīt kā ([60])

$$\begin{cases} x'_1 = \tanh(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 - \theta_1) - b_1x_1, \\ x'_2 = \tanh(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 - \theta_2) - b_2x_2, \\ x'_3 = \tanh(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 - \theta_3) - b_3x_3. \end{cases} \quad (3.4)$$

Šī 3D tīkla elementus sauc par neironiem. Savienojumi starp tiem ir sinapses (vai nervi). Ir algoritms, kas apraksta, kā impulsi tiek izplatīti tīklā. Iepriekš minētajā modelī šo algoritmu kodē matrica

$$W = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Katrs neirons pieņem signālus no citiem un rada vienu izvadi. To, cik lielā mērā neirona  $i$  ievadi nosaka neirona  $j$  izvade, raksturo tā izvade un sinaptiskais svars  $a_{ij}$ . Dinamiskā evolūcija noved pie sistēmas (3.4) atraktoriem, un tas tika eksperimentāli novērots neironu sistēmās. Teorētiskajā modelēšanā uzsvars tiek likts uz sistēmas atraktoriem. Mēs vēlamies tos izpētīt sistēmai (3.4).

Līdzīgas sistēmas rodas ģenētisko regulējošo tīklu teorijā. Atšķirība ir tāda, ka nelinearitāti attēlo pozitīvi novērtēta sigmoidāla funkcija. Viena no šādām sistēmām ir

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{1 + e^{-\mu_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 - \theta_1)}} - b_1x_1, \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{1 + e^{-\mu_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 - \theta_2)}} - b_2x_2, \\ \frac{dx_3}{dt} = \frac{1}{1 + e^{-\mu_3(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 - \theta_3)}} - b_3x_3. \end{cases} \quad (3.6)$$

Sistēmas veidā (3.6) iepriekš pētīja daudzi autori. Ieinteresēts lasītājs var iepazīties ar darbiem ([58], [64], [17], [8], [2], [63]). Līdzīgas sistēmas parādās telekomunikāciju tīklu teorijā.

Šajā sadaļā mēs pētām dažādus sistēmas (3.4) dinamiskos režīmus, kurus var novērot dažādos apstākļos. Vispirms mēs runājam par kritiskajiem punktiem sistēmai (3.4) un novērtējam to skaitu. Tad mēs koncentrējamies uz periodiskiem režīmiem un pētām to pievilcības īpašību citām trajektorijām. To var izdarīt, ievērojot dažus ierobežojumus, sistēmām ar salīdzinoši augstu izmēru. Tiek prezentēti arī haotiskas uzvedības pierādījumi.

### 3.1 Provizoriskie rezultāti

#### 3.1.1 Invarianta kopa

Apskatīsim 3D sistēmu (3.4).

**6. apgalvojums.** Sistēmai (3.4) ir invarianta kopa  $Q_3 = \{\frac{-1}{b_1} < x_1 < \frac{1}{b_1}, \frac{-1}{b_2} < x_2 < \frac{1}{b_2}, \frac{-1}{b_3} < x_3 < \frac{1}{b_3}\}$ , tas ir, jebkura sistēmas trajektorija, kas ieiet  $Q_3$ , no tās nekad neizklūst. Seko pievilcīgo kopu esamība  $Q_3$ .

#### 3.1.2 Nulles izoklīnas

Sistēmas nulles izoklīnas nosaka attiecības

$$\begin{cases} x_1 = [\tanh(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 - \theta_1)]/b_1, \\ x_2 = [\tanh(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 - \theta_2)]/b_2, \\ x_3 = [\tanh(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 - \theta_3)]/b_3. \end{cases} \quad (3.7)$$

### 3.2 Kritiskie punkti

Sistēmas (3.4) kritiskie punkti ir nulles izoklīnu krustpunkti. Tos var atrast no sistēmas

$$\begin{cases} x_1 - [\tanh(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 - \theta_1)]/b_1 = 0, \\ x_2 - [\tanh(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 - \theta_2)]/b_2 = 0, \\ x_3 - [\tanh(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 - \theta_3)]/b_3 = 0. \end{cases} \quad (3.8)$$

**7. apgalvojums.** Visi sistēmas (3.4) kritiskie punkti atrodas invariantajā kopā.

Nulles izoklīnas atrodas tikai kopā  $Q_3$ .

**8. apgalvojums.** Sistēmai (3.4) ir vismaz viens kritiskais punkts.

*Piezīme.* Kritisko punktu skaits var būt lielāks, līdz 27, bet ierobežots.

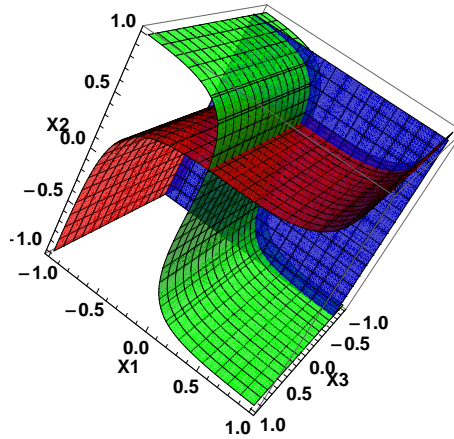
*Piezīme.* Abi apgalvojumi ir derīgi arī  $n$ -dimensijas gadījumam.

### 4. piemērs.

Aplūkosim sistēmu (3.4) ar matricu

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

un  $b_1 = b_2 = b_3 = 1, \theta_1 = 0.8, \theta_2 = 0.3, \theta_3 = 0.2$ . Sistēmai ir viens kritiskais punkts  $(-0.162; 0.399; -0.731)$ .



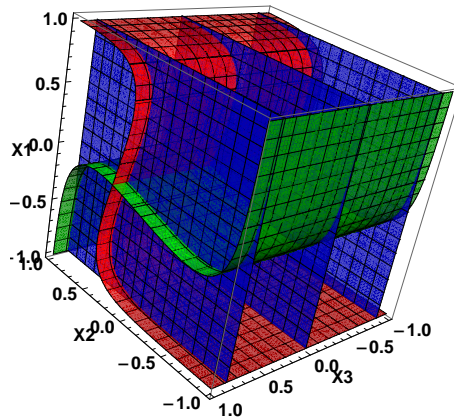
3.1. **zīm.** Nulles izoklīnas sistēmai (3.4) ( $x_1$  - sarkans,  $x_2$  - zaļš,  $x_3$  - zils).

## 5. piemērs.

Aplūkosim piemēru par vairākiem kritiskajiem punktiem un sistēmu (3.4) ar matricu

$$W = \begin{pmatrix} 1.5 & 2 & 0 \\ -2 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

un  $b_1 = b_2 = b_3 = 1, \theta_1 = 0.7, \theta_2 = 0.3, \theta_3 = 0.01$ .



3.2. **zīm.** Nulles izoklīnas sistēmai (3.4) ( $x_1$  - sarkans,  $x_2$  - zaļš,  $x_3$  - zils).

Ir trīs kritiskie punkti  $(-0.067; 0.367; 0.854)$ ,  $(-0.067; 0.367; 0.020)$  un  $(-0.067; 0.367; -0.863)$ .

### 3.2.1 Linearizācija kritiskā punkta apkartnē

Linearizēta sistēma jebkuram kritiskajam punktam  $(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$  ir

$$\begin{cases} u_1' = -b_1 u_1 + a_{11} g_1 u_1 + a_{12} g_1 u_2 + a_{13} g_1 u_3, \\ u_2' = -b_2 u_2 + a_{21} g_2 u_1 + a_{22} g_2 u_2 + a_{23} g_2 u_3, \\ u_3' = -b_3 u_3 + a_{31} g_3 u_1 + a_{32} g_3 u_2 + a_{33} g_3 u_3, \end{cases} \quad (3.11)$$

kur

$$g_1 = \frac{4e^{-2(a_{11}x_1^* + a_{12}x_2^* + a_{13}x_3^* - \theta_1)}}{[1 + e^{-2(a_{11}x_1^* + a_{12}x_2^* + a_{13}x_3^* - \theta_1)}]^2}, \quad (3.12)$$

$$g_2 = \frac{4e^{-2(a_{21}x_1^* + a_{22}x_2^* + a_{23}x_3^* - \theta_2)}}{[1 + e^{-2(a_{21}x_1^* + a_{22}x_2^* + a_{23}x_3^* - \theta_2)}]^2}, \quad (3.13)$$

$$g_3 = \frac{4e^{-2(a_{31}x_1^* + a_{32}x_2^* + a_{33}x_3^* - \theta_3)}}{[1 + e^{-2(a_{31}x_1^* + a_{32}x_2^* + a_{33}x_3^* - \theta_3)}]^2}, \quad (3.14)$$

un sistēmas (3.11) koeficientu matrica ir apzīmēta ar  $A$ . Raksturīgajam vienādojumam, kad  $b_1 = b_2 = b_3 = 1$ , ir šāda forma

$$\begin{aligned} \det|A - \lambda I| = & -\Lambda^3 + (a_{11}g_1 + a_{22}g_2 + a_{33}g_3)\Lambda^2 + [g_1g_2(a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}) + \\ & + g_1g_3(a_{13}a_{31} - a_{11}a_{33}) + g_2g_3(a_{23}a_{32} - a_{22}a_{33})]\Lambda + g_1g_2g_3(a_{11}a_{22}a_{33} + \\ & + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}) = 0, \end{aligned} \quad (3.15)$$

kad  $\Lambda = \lambda + 1$ .

### 3.3 Inhibīcija-aktivizēšana

Apskatīsim sistēmu

$$\begin{cases} x_1' = \tanh(a_{12}x_2 + a_{13}x_3 - \theta_1) - x_1, \\ x_2' = \tanh(a_{21}x_1 + a_{23}x_3 - \theta_2) - x_2, \\ x_3' = \tanh(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 - \theta_3) - x_3. \end{cases} \quad (3.16)$$

kur  $a_{12}$ ,  $a_{13}$ ,  $a_{23}$  ir negatīvi, bet  $a_{21}$ ,  $a_{31}$ ,  $a_{32}$  ir pozitīvi elementi.

Mēs apskatīsim speciālu gadījumu, kad

$$W = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta$ . Tad sistēmai ir viens vienīgs kritiskais punkts.

Ieviešam jaunu parametru  $g_i$ :

$$g_1 = \frac{4e^{-2(-x_2-x_3-\theta)}}{[1 + e^{-2(-x_2-x_3-\theta)}]^2}, \quad (3.18)$$

$$g_2 = \frac{4e^{-2(x_1-x_3-\theta)}}{[1 + e^{-2(x_1-x_3-\theta)}]^2}, \quad (3.19)$$

$$g_3 = \frac{4e^{-2(x_1+x_2-\theta)}}{[1 + e^{-2(x_1+x_2-\theta)}]^2}, \quad (3.20)$$

kuru vērtības ir diapazonā  $(0, 1)$ . Linearizētā sistēma tagad ir

$$\begin{cases} u_1' = -u_1 - g_1 u_2 - g_1 u_3, \\ u_2' = -u_2 + g_2 u_1 - g_2 u_3, \\ u_3' = -u_3 + g_3 u_1 + g_3 u_2, \end{cases} \quad (3.21)$$

Raksturīgo vienādojumu var iegūt no

$$A - \lambda I = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & -g_1 & -g_1 \\ g_2 & -1 - \lambda & -g_2 \\ g_3 & g_3 & -1 - \lambda \end{vmatrix} \quad (3.22)$$

un

$$\det|A - \lambda I| = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + (g_1 g_2 + g_1 g_3 + g_2 g_3 - 3)\lambda + (g_1 g_2 + g_1 g_3 + g_2 g_3 - 1) = 0. \quad (3.23)$$

Raksturīgie skaitļi ir

$$\begin{cases} \lambda_1 = -1, \\ \lambda_2 = -1 - \sqrt{g_1 g_2 + g_1 g_3 + g_2 g_3} i, \\ \lambda_3 = -1 + \sqrt{g_1 g_2 + g_1 g_3 + g_2 g_3} i, \end{cases} \quad (3.24)$$

kur  $i$  ir imaginārā vienība ( $i = \sqrt{-1}$ ).

**9. apgalvojums.** Sistēmas (3.16) kritiskais punkts iepriekšminētajos apstākļos ir 3D fokuss, tas nozīmē, izpildās: atlikušajā dimensijā ir divdimensiju apakštelpa ar stabilu fokusu un pievilcības īpašību.



## 4 Sistēmas ar stabiliem periodiskiem atrisinājumiem. Andronova - Hopfa tipa bifurkācija.

### 4.1 2D gadījums

Vispirms pētām otrās kārtas sistēmu

$$\begin{cases} x_1' = \tanh(kx_1 + bx_2 - \theta_1) - b_1x_1, \\ x_2' = \tanh(ax_1 + kx_2 - \theta_2) - v_2x_2, \end{cases} \quad (4.1)$$

kur  $b = -a = 2$ , un  $k > 0$  ir parametri.

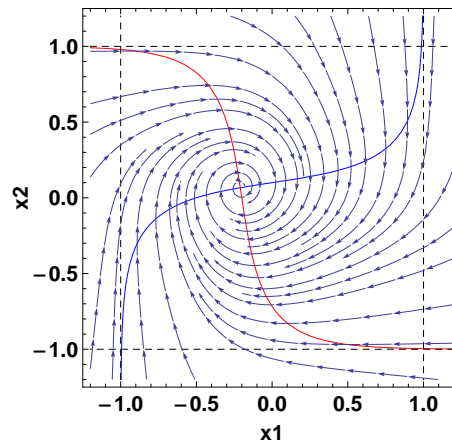
Izvēlamies  $k$  pietiekami mazu, lai vienīgais kritiskais punkts būtu stabils fokuss. Pēc tam palielinām  $k$ , līdz stabils fokuss kļūst nestabils. Tad ap kritisko punktu parādās periodisks atrisinājums. To sauc par Andronova - Hopfa bifurkāciju 2D sistēmām.

### 6. piemērs.

Aplūkosim sistēmu (4.1) ar matricu

$$W = \begin{pmatrix} k & 2 \\ -2 & k \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

un  $k = 0.7, b_1 = b_2 = 1, \theta_1 = 0.2, \theta_2 = 0.4$ .



4.1. **zīm.** Nulles izoklīnas un vektoru lauks sistēmai (4.1) ( $x_1$  - zils,  $x_2$  - sarkans).

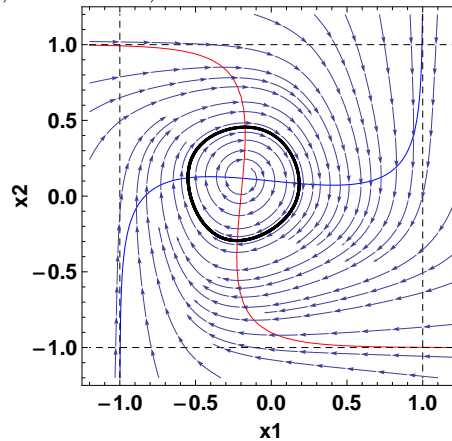
Ir viens kritiskais punkts - stabils fokuss. Ja mainīt parametru  $k$ , stabils fokuss pārvēršas par nestabilu. Tad ap kritisko punktu parādās periodisks atrisinājums.

## 7. piemērs.

Aplūkosim sistēmu (4.1) ar matricu

$$W = \begin{pmatrix} k & 2 \\ -2 & k \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

un  $k = 1.2, b_1 = b_2 = 1, \theta_1 = 0.2, \theta_2 = 0.4$ .



4.2. **zīm.** Robežcikls sistēmā (4.1) ( $x_1$  - zils,  $x_2$  - sarkans).

## 4.2 3D gadījums

Aplūkosim tagad 3D sistēmu ar matricu

$$W = \begin{pmatrix} k & 0 & b \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a & 0 & k \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

kur  $a, b, k$  ir tādi paši kā 2D sistēmā (4.1). Otrā nulles izoklīna nosaka attiecība

$$x_2 = \frac{1}{b_2} \tanh(a_{22}x_2 - \theta_2). \quad (4.5)$$

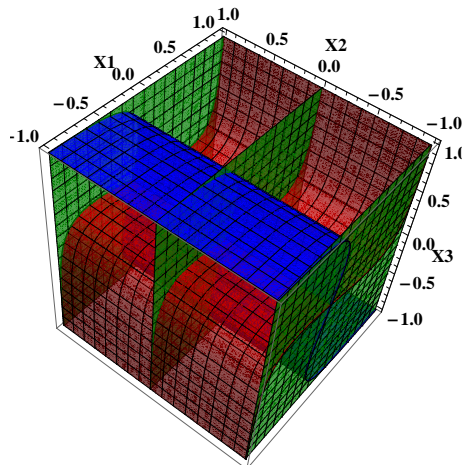
Atlasam parametrus tā, lai vienādojumam (4.5) būtu trīs saknes. Tad otrā nulles izoklīna ir trīs paralēlu plakņu apvienojums.

## 8. piemērs.

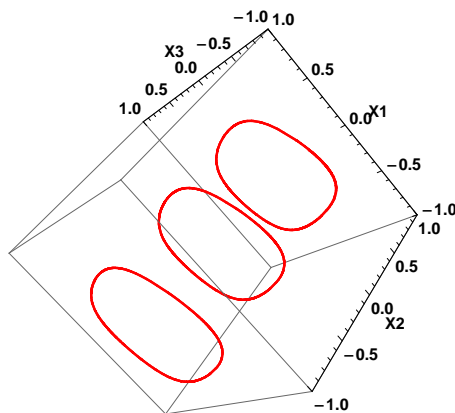
Aplūkosim nulles izoklīnas attēlu. Sistēmā (4.5) ir trīs robežcikli ar matricu

$$W = \begin{pmatrix} 1.5 & 0 & 2 \\ 0 & 2.7 & 0 \\ -2 & 0 & 1.5 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

un  $b_1 = b_2 = b_3 = 1, \theta_1 = 0.2, \theta_2 = 0, \theta_3 = 0.3$ .



4.3. **zīm.** Sistēmas nulles izoklīnas (4.5) ar regulējošo matricu (4.6).



4.4. **zīm.** Trīs robežcikli sistēmai (4.5) ar regulējošo matricu (4.6).

### 4.3 MNT kontrole un vadība

Pirmais citāts no [61]: “MNT modeļus nosaka trīs galvenie objekti: pašu neironu modeļi, tas ir, mezgla īpašības; sinaptisko attiecību un struktūru modeļi, t.i., tīkla topoloģija un svari; un apmācības vai mācīšanās noteikumi, tas ir, svara pielāgošanas metode vai veids, kā tīkls interpretē saņemto informāciju.”

Šajā sadaļā mēs apspriežam problēmu, kas saistīta ar sistēmas (3.4) trajektoriju uzvedības mainīšanu. To var interpretēt kā daļēju sistēmas kontroli. Sistēmas parametri ir koeficienti  $a_{ij}$ , vērtības  $\theta_i$  un  $b_i$  lineārajā daļā. Sistēmas īpašības var mainīt, mainot jebkuru no iepriekšminētajiem parametriem.

Mēs vēlamies parādīt, kā sistēmu veidā (3.4) var modificēt tā, lai tra-

jektorijas sāktu orientēties uz dažiem no norādītajiem atraktoriem. Lai to izdarītu, aplūkosim sistēmu (3.4), kurai ir trīs robežcikli kā atraktori. To var izdarīt trīs darbībās: 1) 3D matricas  $A$  četros stūros ievieto 2D regulējošās matricas elementus, kas atbilst 2D sistēmai ar ierobežoto ciklu  $L$ ; 2) izvēlēties 3D matricas  $A$  vidējo elementu, lai vienādojumam  $x_2 = \tanh(a_{22}x_2 - \theta_2)$  attiecībā pret  $x_2$  būtu tieši trīs saknes  $r_1 < r_2 < r_3$ ; 3) četras atlikušās  $a_{ij}$  vērtības aizvietojam ar nulli. Aizvietosim arī  $b_i$  ar vieninieku. Kad šie sagatavošanās darbi būs pabeigti, otrā nulles izoklīna būs trīs paralēlas plaknes  $P_i$ , kas iet caur  $x_2 = r_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Katra no šīm plaknēm sastāvēs no robežcikla. Divpusēji ierobežojumu cikli piesaistīs trajektorijas no viņu apkaimes. Vidējais robežcikls piesaistīs tikai trajektorijas, kas atrodas  $P_2$  plaknē.

Tagad atrisināsim kontroles problēmu. Lai robežcikls pie  $P_3$  ir nosacīti “slikts”. Problēma ir mainīt sistēmu tā, lai visas trajektorijas  $Q_3$  tiktu piesaistītas robežciklam, kas procesa sākumā atradās plaknē  $P_1$ . Šāda veida problēmas var rasties bieži. Darbā [63] līdzīga problēma tika aplūkota matemātiski attiecībā uz ģenētiskajiem tīkliem.

Risinājums. Mainiet  $\theta_2$ , lai vienādojumam  $x_2 = \tanh(a_{22}x_2 - \theta_2)$  tagad būtu viena vienīga sakne netālu no otrās nulles izoklīnas, tagad ir plakne, kas iet tuvu  $r_1$ . Šī darbība ir iespējama, jo  $\tanh(a_{22}x_2 - \theta_2)$  grafiks ir sigmoidāls, un  $\theta_2$  maiņa nozīmē sākotnējās plaknes  $P_1$  nobīdi abos virzienos. Pēc tam paliek tikai viens atraktors (ierobežots cikls). Problēma ir atrisināta.

#### 4.4 Rezultātu apkopošana

Sistēmas veidā (3.3) atrisinājumu uzvedība ir ļoti atkarīga no regulējošās matricas  $W$  struktūras. Jebkurai sistēmai (3.3) ir vismaz viens kritiskais punkts apgabalā  $D = (\frac{-1}{b_1}, \frac{1}{b_1}) \times (\frac{-1}{b_2}, \frac{1}{b_2}) \times (\frac{-1}{b_3}, \frac{1}{b_3})$ . Neviena sistēmas (3.3) trajektorija nevar iziet ārā no šī apgabala. Ir iespējami vairāki kritiskie punkti. Var rasties stabili mezgli, stabili un nestabili 3D fokusi un sedlu punkti.

## 5 Secinājumi

Darbs ir veltīts parasto diferenciālvienādojumu sistēmu izpētei, kas rodas GRT un MNT matemātiskajos modeļos.

Promocijas darba galvenie rezultāti ir:

- fāzu plaknes analīze divdimensiju GRT sistēmai ar Gomperta nelinearitāti, skaitot kritiskos punktus un to raksturlielumus;
- formulas kritisko punktu linearizācijai un analīzei GRN un ANN sistēmās;
- robežciklu piemēri GRN un ANN sistēmās;
- ANN sistēmu pamatīpašības ar hiperboliskā pieskares funkcijas nelinearitāti;
- GRN un ANN sistēmu salīdzinājums;
- GRN un ANN sistēmu kritisko punktu lokālā analīze otrajai un trešajai dimensijai;
- nulles izoklīnu grafiskie attēlojumi daudzos gadījumos, kas attiecas uz pētījumu;
- GRN un ANN sistēmu risinājumu jutīgā atkarība (sensitive dependence), aprēķinot Ļapunova eksponentus;
- divdimensiju inhibījošo GRN sistēmu kontrole;
- kontrole, mainot parametrus sistēmās ar hiperbolisko tangensu kā nelinearitāti.

## LITERATŪRA

- [1] O. I. Abiodun et al. Comprehensive Review of Artificial Neural Network Applications to Pattern Recognition. *IEEE Access*, vol. 7, pp. 158820-158846, 2019, doi: 10.1109/ACCESS.2019.2945545.
- [2] V. Acary, H. de Jong, B. Brogliato. Numerical simulation of piecewise-linear models of gene regulatory networks using complementarity system. *Physica D: Nonlinear Phenomena Volume 269*, 15 February 2014, Pages 103-119.
- [3] Y. Ahmadian, K.D. Miller. What is the dynamical regime of cerebral cortex? *Neuron*, 109(21), 2021, 3373-3391.
- [4] F.M. Alakwaa. Modeling of Gene Regulatory Networks: A Literature Review. *Journal of Computational Systems Biology* , **1** (2014), issue 1, 1-8.
- [5] L. Alzubaidi, J. Zhang, A.J. Humaidi et al. Review of deep learning: concepts, CNN architectures, challenges, applications, future directions. *J Big Data* 8, 53 (2021). <https://doi.org/10.1186/s40537-021-00444-8>
- [6] D.K. Arrowsmith and C.M. Place. *Dynamical Systems. Differential equations, maps and chaotic behavior.* Chapman and Hall/CRC, London (1992).
- [7] S. Atslega, D. Finaskins, F. Sadyrbaev. On a Planar Dynamical System Arising in the Network Control Theory, *Mathematical Modelling and Analysis*, **21 (2016)**, N 3, 385 - 398.
- [8] E. Brokan and F. Sadyrbaev, Attraction in n-dimensional differential systems from network regulation theory, *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 41, 2018, Issue 17, 7498-7509 <https://doi.org/10.1002/mma.5086>
- [9] E. Brokan and F. Zh. Sadyrbaev. On attractors in gene regulatory systems, *AIP Conference Proceedings* 1809, 020010 (2017): Proc. of the 6th International Advances In Applied Physics And Materials Science Congress & Exhibition (APMAS 2016), 1-3 June 2016, Istanbul, Turkey, doi: 10.1063/1.4975425

- [10] E. Brokan, F. Sadyrbaev. On a differential system arising in the network control theory, *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, **21**(5): 687-701, 2016, doi:10.15388/NA.2016.5.8.
- [11] E. Brokan, F. Zh. Sadyrbaev. On controllability of nonlinear dynamical network. *AIP Conf Proc*, 2116 (1), 040005 (2019), doi.org/10.1063/1.5114026
- [12] F. Chapeau-Blondeau and G. Chauvet. Stable, Oscillatory, and Chaotic Regimes in the Dynamics of Small Neural Networks with Delay. *Neural Networks*, Vol. 5, pp. 735–743, 1992.
- [13] S.P. Cornelius, W.L. Kath, A.E. Motter. Realistic control of network dynamic. *Nature Communications*, Volume 4, Article number: 1942 (2013), 1–9.
- [14] A. Das, A.B. Roy, Pritha Das. Chaos in a three dimensional neural network. *Applied Mathematical Modelling* 24 (2000), 511-522.
- [15] R. Edwards and L. Ironi. Periodic solutions of gene networks with steep sigmoidal regulatory functions. *Physica D*, 282 (2014), 1 - 15. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2014.04.013>
- [16] K. Funahashi, K. and Y. Nakamura. Approximation of dynamical systems by continuous time recurrent neural networks, *Neural Networks* 6, 1993, pp. 801-806.
- [17] C. Furusawa, K. Kaneko. A generic mechanism for adaptive growth rate regulation. *PLoS Comput Biol*, 4(2008), 1, e3. 0035–0042. <https://doi.org/10.1371/journal.pcbi.0040003>. [Google Scholar]
- [18] S. Haykin. *Neural networks. A comprehensive foundation*. Prentice Hall, 2nd edition, reprint from 1999.
- [19] G. van der Heijden. Hopf bifurcation. [www.ucl.ac.uk/ucesgvd/hopf.pdf](http://www.ucl.ac.uk/ucesgvd/hopf.pdf)
- [20] J.J. Hopfield. Neural network and physical system with emergent collective computational abilities. *Proc. Nat. Acad. Sci., USA* 79(1982), 2554-2558.
- [21] H.D. Jong. Modeling and Simulation of Genetic Regulatory Systems: A Literature Review, *J. Comput Biol.* 2002;9(1):67-103, DOI: 10.1089/10665270252833208

- [22] Y. Koizumi et al. Adaptive Virtual Network Topology Control Based on Attractor Selection. *Journal of Lightwave Technology* (ISSN : 0733-8724), Vol.28 (06/2010), Issue 11, pp. 1720 - 1731 DOI:10.1109/JLT.2010.2048412
- [23] Y. Koizumi, T. Miyamura, S. Arakawa, E. Oki, K. Shiimoto, and M. Murata, Application of attractor selection to adaptive virtual network topology control, in *Proceedings of BIONETICS*, pp. 1-8, Nov. 2008.
- [24] Y. Koizumi, T. Miyamura, S. Arakawa, E. Oki, K. Shiimoto, and M. Murata, Robust virtual network topology control based on attractor selection, in *Proceedings of ONDM*, pp. 123-128, Feb. 2009.
- [25] O. Kozlovska, I. Samuilik. Quasi-periodic solutions for a three-dimensional system in gene regulatory network. *WSEAS Trans.on Systems*, Vol. 22, 2023, 727-733.
- [26] N. Kraynyukova, T. Tchumatchenko. Stabilized supralinear network can give rise to bistable, oscillatory, and persistent activity. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 115(13), 2018, 3464-3469.
- [27] Y. Minami, Y. Koizumi, S. Arakawa, T. Miyamuray, K. Shiimotoy and M. Murata, “Benefits of Virtual Network Topology Control based on Attractor Selection in WDM Networks,” *International Journal on Advances in Internet Technology*, vol 4 no 1 & 2, 2011.
- [28] K. Nishida, “Fast and Accurate Virtual Network Reconfiguration using Two-Pathway Bayesian Attractor Model: Design and Evaluation,” *Master Thesis, Osaka Univ.*, 2021.
- [29] Ogorelova D. Description of critical points in equations arising in applications. *Proceedings LU MII*, vol 19 (2019), 50–56.
- [30] Ogorelova D. Gompertz function in the model of gene regulation network. *Proceedings LU MII*, vol 18 (2018), 23–32.
- [31] Ogorelova D. Mathematical modelling of gene and neuronal networks by ordinary differential equations. *Proceedings LU MII*, vol 23 (2023), 33–45.
- [32] Ogorelova D. On a system of ordinary differential equations, arising in applications. *Proceedings LU MII*, vol 22 (2022), 5–12.



- [33] D. A. Ogorelova, F. Zh. Sadyrbaev. Gompertz function in the model of gene regulatory networks. *Itogi Nauki i Tekhniki. Seriya "Sovremennaya Matematika i ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory"*, 2021, Vol. 195, pp. 88–96.
- [34] Ogorelova D., Sadyrbaev F. Comparative Analysis of Models of Genetic and Neuronal Networks. Abstracts of MMA2023, May 30 - June 2, 2023, Jurmala, Latvia. 2023. pp.41.
- [35] Ogorelova D., Sadyrbaev F. Comparative Analysis of Models of Genetic and Neuronal Networks. *Mathematical Modelling and Analysis*, 2024, 29(2), pp. 277–287.
- [36] Ogorelova D., Sadyrbaev F. On a three-dimensional neural network model *Vibroengineering Procedia*. 2022, vol. 47, pp. 69-73.
- [37] Ogorelova D., Sadyrbaev F. On control over system arising in the theory of neuronal networks. *International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics 2023 (ICNAAM 2023)*, (in print).
- [38] Ogorelova D., Sadyrbaev F. Periodic attractors in GRN and ANN networks. *IEEE Xplore*, 2023, pp. 4.
- [39] Ogorelova D., Sadyrbaev F. Remarks on mathematical modeling of gene and neuronal networks by ordinary differential equations. *Axioms MDPI*, 2024, 13(1), 61.
- [40] Ogorelova D., Sadyrbaev F., Samuilik I. On attractors in dynamical systems modeling genetic networks. *Advances in the Theory of Non-linear Analysis and its Applications*, 2023, 7(2), pp. 486-498.
- [41] Ogorelova D., Sadyrbaev F., Samuilik I. On Targeted Control over Trajectories of Dynamical Systems Arising in Models of Complex Networks. *Mathematics*, 2023, 11(9), 2206.
- [42] Ogorelova D., Sadyrbaev F., Samuilik I., Sengileyev V. Sigmoidal functions in network theories. *Proceedings LU MII*, vol 17 (2017), 52-71.
- [43] Ogorelova D., Sadyrbaev F., Sengileyev V. Control in Inhibitory Genetic Regulatory Network Models. *Contemporary Mathematics (Singapore)*, 2020, 1(5), pp. 393-400.

- [44] Ogorelova D., Sengileyev V. Comparison of Two Mathematical Models for Genetic Networks. 1st international symposium on recent advances in fundamental and applied sciences (ISFAS-2021) abstract and full text congress book, 2021, pp. 161.
- [45] T. Ohba, S. Arakawa, and M. Murata, Bayesian-based virtual network reconfiguration for dynamic optical networks, *IEEE/OSA Journal of Optical Communications and Networking*, vol. 10, pp. 440-450, Apr. 2018.
- [46] A. Panagiotis, “Activation Functions: Sigmoid vs Tanh,” Baeldung. 2024.
- [47] F. Sadyrbaev, I. Samuilik. V. Sengileyev. On Modelling of Genetic Regulatory Networks. *WSEAS Trans. Electronics*, vol. 12, 2021, 73-80.
- [48] Sadyrbaev F., Ogorelova D., Samuilik I. A Nullclines Approach to the Study of 2D Artificial Network. *Contemporary Mathematics (Singapore)*, 2019, 1(1), pp. 1-11.
- [49] F. Sadyrbaev. Planar differential systems arising in network regulation theory. *Advanced Mathematical Models & Applications*, Vol.4, No.1, 2019, pp.70-78.
- [50] F. Sadyrbaev, S. Atslega, E. Brokan. (2020) Dynamical Models of Interrelation in a Class of Artificial Networks. In: Pinelas S., Graef J.R., Hilger S., Kloeden P., Schinas C. (eds) *Differential and Difference Equations with Applications. ICDDEA 2019*. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, vol 333. Springer, Cham.
- [51] F. Sadyrbaev, V. Sengileyev, A. Silvans. On Coexistence of Inhibition and Activation in Genetic Regulatory Networks. 19 Intern. Confer. Numer. Analys and Appl. Mathematics, Rhodes, Greece, 20-26 September 2021, To appear in *AIP Conference Proceedings*.
- [52] I. Samuilik, F. Sadyrbaev. On a dynamical model of genetic networks. *WSEAS Trans. Bus. Econ*, 2023, 20, pp. 104-112.
- [53] I. Samuilik, F. Sadyrbaev. On trajectories of a system modeling evolution of genetic networks. *Math Biosci Eng*, 2023, 20(2), 2232–2242.

- [54] Samuilik I., Sadyrbaev F., Ogorelova D. Comparative Analysis of Models of Gene and Neural Networks. *Contemporary Mathematics (Singapore)*, 2023, 4(2), pp. 217-229.
- [55] Samuilik I., Sadyrbaev F., Ogorelova D. Mathematical modeling of three-dimensional genetic regulatory networks using logistic and Gompertz functions. *WSEAS Transactions on Systems and Control*, 2022, 17, pp. 101-107.
- [56] I. Samuilik, F. Sadyrbaev, V. Sengileyev. Examples of periodic biological oscillators: transition to a six-dimensional system, *WSEAS Trans. Computer Research*, vol. 10, 2022, 50-54.
- [57] Samuilik I., Ogorelova D. Mathematical Modelling of GRN Using Different Sigmoidal Functions. 1st international symposium on recent advances in fundamental and applied sciences (ISFAS-2021) abstract and full text congress book, 2021, pp. 491.
- [58] T. Schlitt. Approaches to Modeling Gene Regulatory Networks: A Gentle Introduction. In: *Silico Systems Biology. Methods in Molecular Biology (Methods and Protocols)*, Humana Press, vol. 1021 (2013), 13–35, doi:10.1007/978-1-62703-450-0
- [59] S. Sharma. *Activation Functions in Neural Networks. Towards Data Science*, 2017.
- [60] J.C. Sprott. *Elegant Chaos*. World Scientific, Singapore, 2010.
- [61] V. Vemuri. *Artificial Neural Networks in Control Applications. Advances in Computers*, Vol. 36, 1993, pp. 203–254.
- [62] J. Vohradský. Neural network model of gene expression. *The FASEB Journal*, Vol. 15, March 2001, 846–854.
- [63] Le-Zhi Wang, Ri-Qi Su, Zi-Gang Huang, Xiao Wang, Wen-Xu Wang, Celso Grebogi and Ying-Cheng Lai. A geometrical approach to control and controllability of nonlinear dynamical networks. *Nature Communications*, Volume 7, Article number: 11323 (2016), DOI: 10.1038/ncomms11323
- [64] H. R. Wilson, J. D. Cowan. Excitatory and inhibitory interactions in localized populations of model neurons. *Biophys J.*, vol 12 (1), 1972, pp. 1-24.

- [65] K. Yamazaki, Vo-Ho Viet-Khoa, B. Darshan and Ngan Le. Spiking Neural Networks and Their Applications: A Review. *Brain Sci.* 2022, 12(7), 63. <https://doi.org/10.3390/brainsci12070863>