

DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE

Fizikas un matemātikas katedra

**Inna Samuilika**

# **Matemātiskais modelis tīklu klasei lietojumos**

PROMOCIJAS DARBA KOPSAVILKUMS

zinātniskā doktora grāda,

zinātnes doktors (Ph.D.) matemātikā iegūšanai apakšnozarē “Diferenciālvienādojumi”

Daugavpils, 2023

**Promocijas darbs ir izstrādāts:** Daugavpils Universitātē, Fizikas un matemātikas katedrā laika posmā no 2016. gada līdz 2022. gadam.



Promocijas darbu daļēji atbalstīja projekts: “ESF projekta “Daugavpils Universitātes stratēģiskās specializācijas jomu akadēmiskā personāla profesionālās kompetences stiprināšana 3.kārta” Nr. 8.2.2.0/20/I/003”.

**Doktora studiju programma:** Matemātika, apakšnozare “Diferenciālvienādojumi”

**Promocijas darba zinātniskais vadītājs:**

Dr. habil. math. Prof. Felikss Sadirbajevs, Daugavpils Universitāte, Latvijas Universitātes Matemātikas un informātikas institūts.

**Oficiālie recenzenti:**

- Dr.habil.math. Prof. Svetlana Asmuss (Latvijas Universitāte, Latvija)
- Dr.math. Prof. Inese Bula (Latvijas Universitāte, Latvija)
- Dr hab. Prof. Miroslava Růžičková (Bjalistokas Universitāte, Polija)

**Promocijas darba aizstāvēšana notiks** Daugavpils Universitātes (DU) Matemātikas promocijas padomes atklātajā sēdē tiešsaistē ZOOM platformā, 2023. gada 16. februārī plkst. 13.00.

Ar promocijas darbu un tā kopsavilkumu var iepazīties Daugavpils Universitātes bibliotēkā, Parādes ielā 1, Daugavpilī un <http://du.lv/lv/zinatne/promocija/darbi>

Atsauksmes sūtīt Matemātikas Promocijas padomes sekretārei Daugavpilī, Parādes ielā 1, LV-5400, tālrunis +371 26495316, e-pasts: [anita.sondore@du.lv](mailto:anita.sondore@du.lv)

**Matemātikas Promocijas padomes sekretāre:** Dr. math., Anita Sondore

# SATURS

VISPĀRĪGA INFORMĀCIJA PAR DARBU	4
Ievads	7
<b>1 Gēnu regulatīvais tīkls</b>	<b>9</b>
<b>2 Divu-dimensiju sistēmas</b>	<b>10</b>
2.1 Lineārizēta sistēma . . . . .	10
2.2 Kritiskie punkti . . . . .	11
2.3 Piemēri . . . . .	12
<b>3 Trīs-dimensiju (3D) sistēmas</b>	<b>13</b>
3.1 Lineārizēta sistēma . . . . .	14
3.1.1 Fakti . . . . .	15
3.2 Kritiskie punkti . . . . .	15
3.3 Haoss . . . . .	15
3.4 Ļapunova eksponenti . . . . .	16
3.4.1 Ļapunova eksponentu īpašības . . . . .	17
3.5 Piemēri . . . . .	17
3.5.1 Periodiskie atrisinājumi . . . . .	17
3.6 Haotiskie atraktori . . . . .	19
<b>4 Četru-dimensiju (4D) sistēmas</b>	<b>22</b>
4.1 Lineārizētā sistēma . . . . .	23
4.2 Kritiskie punkti . . . . .	24
4.3 Ļapunova eksponenti . . . . .	25
4.4 Piemēri . . . . .	25
<b>5 Piecu-dimensiju (5D) sistēmas</b>	<b>30</b>
5.1 Piemēri . . . . .	30
<b>6 Sešu-dimensiju (6D) sistēmas</b>	<b>32</b>
6.1 Piemēri . . . . .	32
<b>7 Sešdesmit-dimensiju (60D) sistēmas</b>	<b>36</b>
7.1 Apkašsistēmas . . . . .	38
7.1.1 Trīs-dimensiju sistēmas . . . . .	38
7.1.2 Četru-dimensiju sistēmas . . . . .	39
<b>8 Secinājumi</b>	<b>39</b>
Literatūra	41

# VISPĀRĪGA INFORMĀCIJA PAR DARBU

Promocijas darbs satur 95 lappuses, 102 literatūras avotus, 123 attēlus, 6 tabulas.

Atslēgvārdi: gēnu regulēšanas tīkli, matemātiskā modelēšana, fāzes portrets, periodiski atrisinājumi, atraktori, haoss.

**Pētījuma objekts:** otrās un augstākās kārtas parasto diferenciālvienādojumu sistēmas, ko izmanto gēnu regulējošo tīklu modeļos.

**Pētījuma mērķis:** iegūt rezultātus par īpašas parasto diferenciālvienādojumu sistēmas īpašībām, liekot uzsvāru uz kopām, kas ir savstarpēji piesaistītas, to izvietojumu, atkarību no parametriem un elementu savstarpējās mijiedarbības veidiem. Īpaša uzmanība tiek pievērsta sistēmas attīstībai un tās turpmākās uzvedības prognozēšanai.

## Pētījuma uzdevumi:

- pārskats par parasto diferenciālvienādojumu (PDV) zemu dimensiju sistēmām, ko izmanto ģenētisko regulējošo tīklu (GRT) modeļos;
- informācijas vākšana par kritiskajiem punktiem zemu dimensiju sistēmās;
- pētīt atraktorus divdimensiju (2D) un trīsdimensiju (3D) sistēmās;
- kritisko punktu raksturīgo skaitļu formulu pierakstīšana 2D un 3D sistēmām;
- atrast atraktorus, kas ir atšķirīgi no kritiskā punkta, 3D sistēmās;
- apskatīt 3D sistēmu piemērus, kur atraktori ir stabilas periodiskas trajektorijas formā;
- apskatīt 3D sistēmu piemērus, kas uzrāda haotisku atrisinājumu uzvedību;
- izmantot datorprogrammas, lai izpētītu haotisku uzvedību, pamatojoties uz Ļapunova eksponentu analīzi;
- apskatīt četru-dimensiju (4D) sistēmas, pierakstīt kritisko punktu raksturīgo skaitļu formulas;
- konstruēt 4D sistēmu piemērus, kur eksistē atraktors stabila kritiskā punkta veidā;
- konstruēt 4D sistēmu piemērus, kur eksistē atraktors stabilas periodiskas trajektorijas veidā;
- apskatīt 4D sistēmu piemērus, kur eksistē atrisinājumu haotiska uzvedība;
- 4D atraktoru vizualizācija, projicējot tos 4D fāzes telpas zemas dimensijas apakštelpās;
- apskatīt neironu tīklu piemērus un atrast līdzību attiecīgajos PDV tipa modeļos;
- konstruēt 5D un 6D sistēmu piemērus, kurām ir periodiskie atraktori;
- apskatīt 6D sistēmas piemērus, kas uzrāda neregulāro atrisinājumu uzvedību;

- 5D un 6D atrektoru vizualizācija, projicējot tos zemas dimensijas apakštelpās;
- pārskats par rezultātiem un turpmāko pētījumu gaitu.

**Pētījuma metodes:**

1. matemātiskās analīzes klasiskās metodes;
2. salīdzināšanas metode;
3. fāzes plaknes metode;
4. sistēmas linearizācijas metode apkārt triviālajam atrisinājumam;
5. perturbācijas metode.

**Promocijas darba rezultāti** publicēti 23 zinātniskajos rakstos ([4], [48], [57]-[77]), no tiem seši ([4], [59], [67], [68], [69], [70]) - publicēti SCOPUS saraksta žurnālos, trīs ([57], [66], [65]) ir pieņemti publicēšanai SCOPUS žurnālos, divi ([58], [71]) pieņemti publicēšanai Web of Science žurnālos.

Promocijas darba rezultāti aprobēti dažādu līmeņu starptautiskajās konferencēs:

1. Inna Samuilik, Nullcline method for research of GRN system critical points, The 78th Scientific Conference of the University of Latvia, (Riga, Latvia, February 28, 2020)
2. Felix Sadyrbaev, Svetlana Atslega, Inna Samuilik, On Controllability in Models of Biological Networks, VIII International Conference on Science and Technology, (Belgorod, Russia, September 24-25, 2020).
3. Inna Samuilik, Remark on four dimensional system arising in applications, The 79th Scientific Conference of the University of Latvia, (Riga, Latvia, February 26, 2021).
4. Felix Sadyrbaev, Inna Samuilik, Mathematical modelling of genetic regulatory networks, 2. International Baku Scientific Research Conference, (Baku, Azerbaijan, April 28-30, 2021).
5. Inna Samuilik, Felix Sadyrbaev, Mathematical modelling of evolution of multidimensional networks, 2. International Congress on Mathematics and Geometry, (Ankara, Turkey, May 20, 2021).
6. Svetlana Atslega, Felix Sadyrbaev, Inna Samuilik, On modelling of complex networks, 20th International Scientific Conference Engineering for Rural Development, (Jelgava, Latvia, May 27, 2021).
7. Inna Samuilik, Diana Ogorelova, Mathematical modelling of GRN using different sigmoidal functions, 1st International Symposium on Recent Advances in Fundamental and Applied Sciences, (Erzurum, Turkey, September 10-12, 2021).
8. Felix Sadyrbaev, Inna Samuilik, On the hierarchy of attractors in dynamical models of complex networks, 19th International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics, (Rhodes, Greece, September 20-26, 2021)

9. Inna Samuilik, Felix Sadyrbaev, Valentin Sengileyev, Examples of periodic biological oscillators, International Conference “Differential Equations, Mathematical Modeling and Computational Algorithm”, (Belgorod, Russia, October 25-29, 2021).
10. Felix Sadyrbaev, Inna Samuilik, Albert Silvans, On mathematical models of evolving networks, International Conference “Differential Equations and Related Topics, 24th joint session of Moscow Mathematical Society and I.G.Petrovskii Seminar”, (Moscow, Russia, December 26-30, 2021).
11. Inna Samuilik, Felix Sadyrbaev, Diana Ogorelova, Mathematical modeling of three-dimensional genetic regulatory networks using different sigmoidal functions, International liberty interdisciplinary studies conference, (NewYork, ASV, January 16-17, 2022).
12. Inna Samuilik, On a four-dimensional system of differential equations related to the theory of gene regulatory networks, The 80th Scientific Conference of the University of Latvia, (Riga, Latvia, February 25, 2022).
13. Inna Samuilik, Felix Sadyrbaev, A Note on Attractor Selection, The 5th International Conference on Networking, Intelligent Systems and Security, (Bandung, Indonesia, March 30-31, 2022).
14. Inna Samuilik, Felix Sadyrbaev, Svetlana Atslega, Mathematical modelling of non-linear dynamic systems, 21st International Scientific Conference Engineering for Rural Development, (Jelgava, Latvia, May 25-27, 2022).
15. Inna Samuilik, Genetic engineering-construction of a network of four dimensions with a chaotic attractor, 58th International JVE Conference, (Ventspils, Latvia, August 25-26, 2022).

# IEVADS

Parasto diferenciālvienādojumu teorija (īsumā PDV) radās praktrisku darbību rezultātā. Tuvāk mūsdienām parādījās parasto diferenciālvienādojumu teorijas jaunas nozares. Starp tām svarīgu lomu ieņēma robežproblēmu teorija. Rīgai un tās universitātēm šajā jomā ir sena pieredze. 20. gadsimtā ievērojami matemātiķi bija Anatolijs Miškis, Jurijs Klokovs un Arnolds Lepins. J. Klokovs un A. Lepins pētīja robežproblēmu un ar to saistītos uzdevumus. Šie pētījumi joprojām tiek turpināti Latvijas Universitātes Matemātikas un informātikas institūtā. J. Klokovam un A. Lepinam bija vairāki doktoranti un daudzi viņu pētījumu turpinātāji. Daži no viņiem joprojām aktīvi darbojas diferenciālvienādojumu un matemātiskās modelēšanas nozarē. Profesors Linards Reiziņš izveidoja citu diferenciālvienādojumu teorijas virzienu. Augstākās kārtas diferenciālvienādojumu stabilitātes problēmas un kritisko punktu klasifikācija bija profesora un viņa studentu galvenie pētījuma virzieni. Rīga un Latvija joprojām saglabā būtisku lomu PDV teorijas pētījumu jomā.

2015. gadā, pievienojoties profesora Aleksandra Šostaka pētījumu telekomunikāciju tīklu jomā grupai Eiropas Savienības projekta ietvaros, matemātiķu grupa no Rīgas un Daugavpils uzsāka pētījumus par jauna veida PDV jautājumiem. Telekomunikāciju tīklu teorijas pētījumu jomā aktīva ir Japānas matemātikas pētnieku grupa t.sk. Juki Koizumi, Masajuki Murata u.c. Viņi ierosināja telekomunikāciju tīklu projektēšanā izmantot dabā novērojamos pašorganizēšanās principus. Tika norādīts, ka visās dzīvo organismu šūnās pastāv ģenētiskais regulēšanās tīkls (turpmāk tekstā GRT), kas ir atbildīgs par reakcijas izmaiņām vidē. Tika uzsvērts, ka var izmantot GRT matemātisko modeli, kas izmanto PDV sistēmu telekomunikāciju tīkla vadībai un kontrolei. Tā sauktā virtuālā tīkla topoloģija tika ierosināta gaismas ceļu kopas organizēšanai, lai izveidotu mehānismu ātrai reaģēšanai un telekomunikāciju tīkla pārkārtošanai nelabvēlīgos apstākļos. PDV sistēma, kas regulē šo procesu pārkārtošanās, bija piesaistījusi Latvijas Universitātes Matemātikas un Informātikas Institūta un Daugavpils Univesitātes pētnieku uzmanību. Iespējas uzkrāto zināšanu PDV teorijā un pieredzes pielietošanai risinājumu meklēšanai jauna veida problēmām bija sākumpunkts pētījumiem šajā virzienā.

Aplūkota sistēma nav triviāla. Tā satur  $n$  parastos diferencialvienādojumus formā  $X' = F(WX - \theta) - VX$ , kur  $X$  ir nezināmo vektors,  $F$  ir sigmoidālu funkciju vektors,  $W$  ir  $n \times n$  matrica (to sauc par regulējošo matricu),  $\theta$  un  $V$  ir parametri. Šajā ievadā šī sistēma ir apzīmēta ar  $S$ . Pirmo reizi šī sistēma parādījās Vilsona-Kovana rakstā. Bija aprakstīti cilvēka smadzeņu neironu tīkli. To izmantoja ģenētiskās modelēšanas tīkliem, un  $X$  nozīme bija cita. Tas bija saistīts ar jebkura gēna proteīna ekspresiju. Ietekmējot vienu gēnu, var ietekmēt visu tīklu. Pētījuma objekts ir daudzparametru autonoma kvazi-lineāra parasto diferenciālvienādojumu sistēma.

Saskaņā ar autorei pieejamo informāciju, šī sistēma netika pētīta trīs-dimensiju un augstākām dimensijām. Pēdējā desmitgadē bija parādījušies vairāki raksti, kuros īpaši tika interpretēta sistēma  $S$ . Zinātniski nozīmīgos rakstos [10], [89], kuru autori ir Cornelius et al and Le-Zhi Wang et al.  $X$  vektors bija interpretēts kā ģenētiskā tīkla stāvokļa vektors. Šis vektors ir atkarīgs no laika,  $X(t)$ , un tas pāriet uz savu ierobežojošo kopu jeb punktu. Sistēmas  $S$  fāžu telpa ir laikā nemainīga kopa  $Q$  ar īpašību: jebkura sistēmas  $S$  trajektorija, kas ienāk  $Q$ , nekad neizklūst no tās. Daudzas slimības var ārstēt, izmantojot šo teoriju (leikēmija, multiplā skleroze, Alheimers). Tā kā sistēma  $S$  satur daudz parametru, daži no tiem ir regulējami un ar tiem var pārvaldīt un kontrolēt tīklu. Slimības ārstēšanā tas

nozīmē novirzīšanu no “sliktas” trajektorijas uz “normālu” atrektoru.

Iepriekš minētais motivēja pētīt sistēmu  $S$ . Sasniegumi šajā nozarē:

1. Divu dimensiju sistēmas ir apskatītas, izmantojot izoklīnu metodi;
2. Trīs dimensiju sistēmas ir apskatītas, izmantojot izoklīnu metodi un plašas skaitļošanas pētījumus; galvenie rezultāti ir a) trīs dimensiju sistēmas kritisko punktu aprēķināšanas formulas; b) vairāki periodisko atrektoru piemēri;
3. Četru dimensiju sistēmas ir apskatītas, ņemot vērā iegūtos rezultātus par divu dimensiju sistēmām; galvenie rezultāti ir a) kritisko punktu formulas; b) nesaistītu 4D sistēmu periodiskie atraktori; c) periodisko atrektoru piemēri; d) apskatīta 4D sistēmas neregulārā atrisinājumu uzvedība, kas tiecas uz 4D atrektoru;
4. Ir apskatīti daži piecu-dimensiju piemēri;
5. Ir apskatīta sešu-dimensiju sistēma; galvenie rezultāti ir a) 6D sistēmas piemēri, kas ir konstruēti, ņemot vērā iepriekš apskatītas 2D sistēmas; sistēmai var būt periodiskie atraktori; b) 6D sistēmas piemēri, kas ir konstruēti, ņemot vērā iepriekš apskatītas 3D sistēmas; sistēmai var būt periodiskie atraktori;
6. Ir apskatīta sešdesmit-dimensiju sistēma.

Darbs satur plašus sistēmas  $S$  skaitļošanas pētījumus (fāzes portreti, atrektoru piemēri). Iegūtie rezultāti ir pamats turpmākiem pētījumiem šajā virzienā.



# 1 Gēnu regulatīvais tīkls

Gēnu regulatīvie tīkli (īsumā GRT) eksistē katra dzīva organisma šūnā. GRT regulē reakcijas uz izmaiņām vidē, kontrolē šūnas attīstību un pārvalda jebkura veida funkcionēšanu. GRT elementi, ko sauc par gēniem, var ietekmēt citus gēnus, nosūtot proteīnus [43]. Šādas ietekmes rezultātā citus gēnus var aktivizēt vai inhibēt. Mēģinājumi matemātiski modelēt GRT darbību ir daudzkārtēji, izmantojot dažādus matemātiskos objektus un rīkus ([26],[87]). Lai aprakstītu tīkla attīstību, vispiemērotākā pieeja ir diferenciālvienādojumu izmantošana.

Sistēma ir veidā

$$X' = F(WX - \theta) - vX,$$

kur  $X$  ir tīkla stāvokļa vektors,  $F$  ir sigmoidāla nelinearitāte ar argumentu, kas pārveidota, reizinot ar regulējošo matricu  $W$ ,  $vX$  ir dabiska sabrukšana no  $F$ , ja  $F = 0$ .

**1.1. definīcija.** *Dinamiskā sistēma ir vienādojumu sistēma, kurā funkcija apraksta punkta atkarību no laika apkārtējā telpā. Kustības vienādojums var būt modelēts kā diferenciālvienādojums un diferenciālvienādojums [34].*

Aplūkosim  $n$ -dimensiju dinamisko sistēmu

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{1 + e^{-\mu_1(w_{11}x_1 + w_{12}x_2 + \dots + w_{1n}x_n - \theta_1)}} - v_1x_1, \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{1 + e^{-\mu_2(w_{21}x_1 + w_{22}x_2 + \dots + w_{2n}x_n - \theta_2)}} - v_2x_2, \\ \dots \\ \frac{dx_n}{dt} = \frac{1}{1 + e^{-\mu_n(w_{n1}x_1 + w_{n2}x_2 + \dots + w_{nn}x_n - \theta_n)}} - v_nx_n, \end{cases} \quad (1.1)$$

kur  $\mu_n > 0$ ,  $\theta_n$  un  $v_n > 0$  ir parametri un  $w_{ij}$  ir regulējošās matricas koeficienti

$$W = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1n} \\ w_{21} & w_{22} & \dots & w_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{n1} & w_{n2} & \dots & w_{nn} \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

GRT parametriem ir šāda bioloģiskā interpretācija:

- $v_i$  -  $i$ -tā gēna degradācijas koeficients;
- $w_{ij}$  -  $j$ -tā gēna kontroles stiprums uz gēnu  $i$ ,  $w_{ij}$  pozitīvas vērtības norāda uz aktivizējošām ietekmēm kamēr negatīvas vērtības definē represīvo ietekmi;
- $\theta_i$  - ārēja gēna  $i$  ietekme, kas modulē gēnu reakcijas jūtīgumu pret aktivizējošām vai represējošām ietekmēm.

## 2 Divu-dimensiju sistēmas

Aplūkosim

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{1 + e^{-\mu_1(w_{11}x_1 + w_{12}x_2 - \theta_1)}} - v_1x_1, \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{1 + e^{-\mu_2(w_{21}x_1 + w_{22}x_2 - \theta_2)}} - v_2x_2, \end{cases} \quad (2.3)$$

kur  $\mu_i$  un  $v_i$  ir pozitīvi.

Sistēmai (2.3) ir desmit parametri  $(w_{ij}, \mu_i, \theta_i, v_i)$ . Mainot jebkuru no parametriem, mainās arī sistēmas īpašības un atrisinājumi. Konstruēt tādu raksturīgo vienādojumu ir netriviāls uzdevums.

Sigmoidālas funkcijas argumentu  $z$  aizvietojam ar regulējošo matricu

$$W = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Šī matrica apraksta tīkla elementu  $x_i$  savstarpējo saistību.

Izoklīnas ir

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{v_1} \frac{1}{1 + e^{-\mu_1(w_{11}x_1 + w_{12}x_2 - \theta_1)}}, \\ x_2 = \frac{1}{v_2} \frac{1}{1 + e^{-\mu_2(w_{21}x_1 + w_{22}x_2 - \theta_2)}}. \end{cases} \quad (2.5)$$

Funkcija  $f(z) = \frac{1}{1 + e^{-\mu z}}$  ir sigmoidāla funkcija un tās vērtību kopa ir  $(0, 1)$ . Pirmā izoklīna ir  $\{(x_1, x_2) : 0 < x_1 < \frac{1}{v_1}, x_2 \in \mathbb{R}\}$  un otrā ir  $\{(x_1, x_2) : x_1 \in \mathbb{R}, 0 < x_2 < \frac{1}{v_2}\}$ . Turklāt visi kritiskie punkti ir izvietoti taisnstūrī  $Q := \{(x_1, x_2) : 0 < x_1 < \frac{1}{v_1}, 0 < x_2 < \frac{1}{v_2}\}$ .

**2.1. piezīme.** *Sistēmā (2.3) vismaz viens kritiskais punkts eksistē.*

### 2.1 Lineārizēta sistēma

Kritisko punktu analīzei ir nepieciešama lineārizēta sistēma.

$$\begin{cases} u_1' = -v_1u_1 + \mu_1w_{11}g_1u_1 + \mu_1w_{12}g_1u_2, \\ u_2' = -v_2u_2 + \mu_2w_{21}g_2u_1 + \mu_2w_{22}g_2u_2, \end{cases}$$

kur

$$g_1 = \frac{e^{-\mu_1(w_{11}x_1^* + w_{12}x_2^* - \theta_1)}}{[1 + e^{-\mu_1(w_{11}x_1^* + w_{12}x_2^* - \theta_1)}]^2},$$

$$g_2 = \frac{e^{-\mu_2(w_{21}x_1^* + w_{22}x_2^* - \theta_2)}}{[1 + e^{-\mu_2(w_{21}x_1^* + w_{22}x_2^* - \theta_2)}]^2}$$

un  $(x_1^*, x_2^*)$  ir kritiskais punkts.

$$A = \begin{vmatrix} \mu_1 w_{11} g_1 - v_1 & \mu_1 w_{12} g_1 \\ \mu_2 w_{21} g_2 & \mu_2 w_{22} g_2 - v_2 \end{vmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{vmatrix} \mu_1 w_{11} g_1 - v_1 - \lambda & \mu_1 w_{12} g_1 \\ \mu_2 w_{21} g_2 & \mu_2 w_{22} g_2 - v_2 - \lambda \end{vmatrix}$$

un raksturīgais vienādojums ir

$$\begin{aligned} \det|A - \lambda I| &= (\mu_1 w_{11} g_1 - v_1 - \lambda)(\mu_2 w_{22} g_2 - v_2 - \lambda) - (\mu_2 w_{21} g_2)(\mu_1 w_{12} g_1) = \\ &= \mu_1 \mu_2 w_{11} w_{22} g_1 g_2 - \mu_1 w_{11} g_1 v_2 - \mu_1 w_{11} g_1 \lambda - \mu_2 w_{22} g_2 v_1 + v_1 v_2 + v_1 \lambda - \mu_2 w_{22} g_2 \lambda + \\ &= v_2 \lambda + \lambda^2 - \mu_1 \mu_2 w_{12} w_{21} g_1 g_2 = \lambda^2 + (v_1 + v_2 - \mu_1 w_{11} g_1 - \mu_2 w_{22} g_2) \lambda + \\ &= \mu_1 \mu_2 w_{11} w_{22} g_1 g_2 - \mu_1 w_{11} g_1 v_2 - \mu_2 w_{22} g_2 v_1 - \mu_1 \mu_2 w_{12} w_{21} g_1 g_2 + v_1 v_2 = 0. \end{aligned}$$

Lai vienkāršotu, mēs varam uzrakstīt raksturīgo vienādojumu kā

$$\lambda^2 + B\lambda + C = 0, \quad (2.6)$$

kur

$$B = v_1 + v_2 - \mu_1 w_{11} g_1 - \mu_2 w_{22} g_2,$$

$$C = \mu_1 \mu_2 w_{11} w_{22} g_1 g_2 - \mu_1 w_{11} g_1 v_2 - \mu_2 w_{22} g_2 v_1 - \mu_1 \mu_2 w_{12} w_{21} g_1 g_2 + v_1 v_2.$$

## 2.2 Kritiskie punkti

Vienkāršam nepārtraukta laika modelim, atkarībā no parametriem, atraktors var būt viens punkts (kritiskais punkts), divi punkti (divu punktu cikls), četri, astoņi, vai lielāks punktu skaits (sarežģītāks cikls), slēgta līkne vai haotisks atraktors [23].

**2.1. definīcija.** *Atraktors ir reprezentējošā punkta ierobežojošā trajektorija fāžu telpā, uz kuru tiecas visi sākotnējie režīmi [3].*

**2.2. definīcija.** *Robežcikls ir slēgta trajektorija fāžu telpā, kurai piemīt īpašība, ka vismaz viena cita trajektorija spirālveidīgi iekļaujas tajā, laikiem tuvojoties bezgalībai, vai arī negatīvai bezgalībai [17].*

**2.2. piezīme.** *Parasto diferenciālvienādojumu nelineārām sistēmām var eksistēt robežcikls, ja vienādojumu skaits šajā sistēmā ir  $n \geq 2$ .*

**2.3. piezīme.** *Slēgtai trajektorijai ir kritisks punkts tās iekšienē telpā  $\mathbb{R}^2$ .*

Ja tas ir stabils līdzsvara stāvoklis (kritiskais punkts), tad sistēmas atraktors būs fiksēts punkts. Ja tā ir stabila periodiska kustība, tad atraktors būs slēgta līkne, ko sauc par robežciklu [3].

## 2.3 Piemēri

Aplūkosim (2.6), kur

$$B^2 < 4C, -\frac{B}{2} > 0 \Rightarrow B < 0.$$

**2.4. piezīme.** Ja  $w_{11} = w_{22} = 0$ , tad  $B > 0$  un visi kritiskie punkti ir nestabili fokusi.

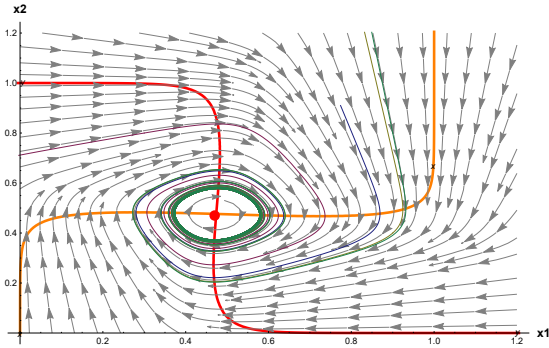
$$\begin{aligned} B^2 - 4C &= (v_1 + v_2 - \mu_1 w_{11} g_1 - \mu_2 w_{22} g_2)^2 \\ &- 4(\mu_1 \mu_2 w_{11} w_{22} g_1 g_2 - \mu_1 w_{11} g_1 v_2 - \mu_2 w_{22} g_2 v_1 - \mu_1 \mu_2 w_{12} w_{21} g_1 g_2 + v_1 v_2) = \\ &= v_1^2 + 2v_1 v_2 - 2v_1 \mu_1 w_{11} g_1 - 2v_1 \mu_2 w_{22} g_2 + v_2^2 - 2v_2 \mu_1 w_{11} g_1 - 2v_2 \mu_2 w_{22} g_2 \\ &+ \mu_1^2 w_{11}^2 g_1^2 + 2\mu_1 w_{11} g_1 \mu_2 w_{22} g_2 + \mu_2^2 w_{22}^2 g_2^2 - 4\mu_1 \mu_2 w_{11} w_{22} g_1 g_2 + 4\mu_1 w_{11} g_1 v_2 \\ &+ 4\mu_2 w_{22} g_2 v_1 + 4\mu_1 \mu_2 w_{12} w_{21} g_1 g_2 - 4v_1 v_2 = \\ &= (-v_1 + v_2 + \mu_1 w_{11} g_1)^2 + 2w_{22} g_2 (\mu_2 (v_1 - v_2 - \mu_1 w_{11} g_1) + 2\mu_1 w_{12} w_{21} g_1) + \mu_2^2 w_{22}^2 g_2^2. \end{aligned}$$

**1. piemērs.** Aplūkosim  $\mu_1 = \mu_2 = 10$ ,  $v_1 = v_2 = 1$  and  $\theta_1 = 1.2$ ,  $\theta_2 = -0.7$ . Regulējošā matrica ir

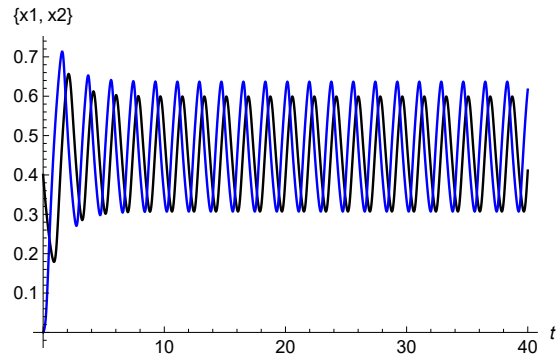
$$W = \begin{pmatrix} 0.5 & 2 \\ -2 & 0.5 \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Kritiskā punkta  $(0.47; 0.47)$  raksturīgais vienādojums ir (2.6), kur  $B = -0.48$ ,  $C = 24.66$ .

Atrisinot vienādojumu, iegūstam  $\lambda_1 = 0.2474 - 4.96i$  un  $\lambda_2 = 0.2474 + 4.96i$ . Kritiskā punkta veids ir nestabils fokuss.



**2.1. zīm.** Sistēmas (2.3) ar regulējošo matricu (2.7) fāzes portrets. Kritiskā punkta veids ir nestabils fokuss.

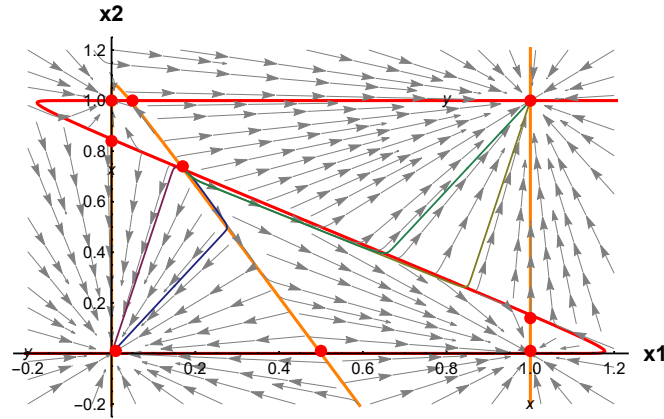


**2.2. zīm.** Sistēmas (2.3) ar regulējošo matricu (2.7) atrisinājumi  $(x_1(t), x_2(t))$ .

**2.5. piezīme.** Divu dimensiju diferenciālvienādojumu sistēmai (2.3) var eksistēt deviņi kritiskie punkti, ja  $w_{11}^2 + w_{22}^2 > 0$ .

**2. piemērs.** Aplūkosim  $\mu = 40$ ,  $v_1 = v_2 = 1$  un  $\theta_1 = \theta_2 = 2.5$ . Regulējošā matrica ir

$$W = \begin{pmatrix} 5 & 2.2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$



**2.3. zīm.** Sistēmas (2.3) ar regulējošo matricu (2.8) fāzes portrets. Deviņi kritiskie punkti.

**2.6. piezīme.** Pieņemsim, ka regulējošās matricas (2.4) elementi  $w_{11}$  un  $w_{22}$  ir nulles. Tad maksimālais kritisko punktu skaits sistēmai (2.3) ir trīs. Tieši viens un tieši divi kritiskie punkti ir iespējami.

**2.7. piezīme.** Pieņemsim, ka regulējošās matricas (2.4) elementi  $w_{11}$  un  $w_{22}$  nav nulles un tiem ir pretējās zīmes. Tad var parādīties Hopfa bifurkācija un sistēmai (2.3) var būt robežcikls.

### 3 Trīs-dimensiju (3D) sistēmas

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{1 + e^{-\mu_1(w_{11}x_1 + w_{12}x_2 + w_{13}x_n - \theta_1)}} - v_1x_1, \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{1 + e^{-\mu_2(w_{21}x_1 + w_{22}x_2 + w_{23}x_n - \theta_2)}} - v_2x_2, \\ \frac{dx_3}{dt} = \frac{1}{1 + e^{-\mu_3(w_{31}x_1 + w_{32}x_2 + w_{33}x_3 - \theta_3)}} - v_3x_3, \end{cases} \quad (3.9)$$

kur  $\mu_i$ ,  $\theta_i$ ,  $v_i$  ir parametri,  $w_{ij}$  ir regulējošās matricas koeficienti

$$W = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Izoklīnas ir

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{v_1} \frac{1}{1 + e^{-\mu_1 (w_{11}x_1 + w_{12}x_2 + w_{13}x_3 - \theta_1)}}, \\ x_2 = \frac{1}{v_2} \frac{1}{1 + e^{-\mu_2 (w_{21}x_1 - w_{22}x_2 + w_{23}x_3 - \theta_2)}}, \\ x_3 = \frac{1}{v_3} \frac{1}{1 + e^{-\mu_3 (w_{31}x_1 + w_{32}x_2 + w_{33}x_3 - \theta_3)}}. \end{cases}$$

### 3.1 Lineārizēta sistēma

Jebkuram kritiskajam punktam  $(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$  lineārizēta sistēma ir veidā

$$\begin{cases} u_1' = -v_1 u_1 + \mu_1 w_{11} g_1 u_1 + \mu_1 w_{12} g_1 u_2 + \mu_1 w_{13} g_1 u_3, \\ u_2' = -v_2 u_2 + \mu_2 w_{21} g_2 u_1 + \mu_2 w_{22} g_2 u_2 + \mu_2 w_{23} g_2 u_3, \\ u_3' = -v_3 u_3 + \mu_3 w_{31} g_3 u_1 + \mu_3 w_{32} g_3 u_2 + \mu_3 w_{33} g_3 u_3, \end{cases}$$

kur

$$g_1 = \frac{e^{-\mu_1 (w_{11}x_1^* + w_{12}x_2^* + w_{13}x_3^* - \theta_1)}}{[1 + e^{-\mu_1 (w_{11}x_1^* + w_{12}x_2^* + w_{13}x_3^* - \theta_1)}]^2}, \quad (3.11)$$

$$g_2 = \frac{e^{-\mu_2 (w_{21}x_1^* + w_{22}x_2^* + w_{23}x_3^* - \theta_2)}}{[1 + e^{-\mu_2 (w_{21}x_1^* + w_{22}x_2^* + w_{23}x_3^* - \theta_2)}]^2}, \quad (3.12)$$

$$g_3 = \frac{e^{-\mu_3 (w_{31}x_1^* + w_{32}x_2^* + w_{33}x_3^* - \theta_3)}}{[1 + e^{-\mu_3 (w_{31}x_1^* + w_{32}x_2^* + w_{33}x_3^* - \theta_3)}]^2}. \quad (3.13)$$

Aplūkosim

$$A - \lambda I = \begin{vmatrix} \mu_1 w_{11} g_1 - v_1 - \lambda & \mu_1 w_{12} g_1 & \mu_1 w_{13} g_1 \\ \mu_2 w_{21} g_2 & \mu_2 w_{22} g_2 - v_2 - \lambda & \mu_2 w_{23} g_2 \\ \mu_3 w_{31} g_3 & \mu_3 w_{32} g_3 & \mu_3 w_{33} g_3 - v_3 - \lambda \end{vmatrix}$$

un raksturīgais vienādojums ir

$$\begin{aligned} \det|A - \lambda I| = & -\lambda^3 + \lambda^2(-v_1 - v_2 - v_3 + \mu_1 w_{11} g_1 + \mu_2 w_{22} g_2 + \mu_3 w_{33} g_3) + \lambda(g_1 v_3 \mu_1 w_{11} + \\ & + \mu_2 w_{22} g_2 v_3 + g_1 g_2 w_{21} \mu_1 \mu_2 w_{12} - g_1 g_2 w_{11} w_{22} \mu_1 \mu_2 + g_1 g_3 w_{31} w_{13} \mu_1 \mu_3 - \\ & - g_1 g_3 w_{11} w_{33} \mu_1 \mu_3 + g_2 g_3 w_{32} w_{23} \mu_2 \mu_3 - g_2 g_3 w_{22} w_{33} \mu_2 \mu_3 - v_1(v_2 + v_3 - g_2 w_{22} \mu_2 - g_3 w_{33} \mu_3) + \\ & + v_2(-v_3 + g_1 w_{11} \mu_1 + g_3 w_{33} \mu_3) + v_1(v_2(-v_3 + g_3 w_{33} \mu_3) + g_2 \mu_2(v_3 w_{22} + g_3 w_{32} w_{23} \mu_3 - g_3 w_{22} w_{33} \mu_3)) + \\ & + g_1 \mu_3(v_2(v_3 w_{11} + g_3(w_{31} w_{13} - w_{11} w_{33})) \mu_3) + g_2 \mu_2(v_3(w_{21} w_{12} - w_{11} w_{22}) + \\ & + g_3(-w_{31} w_{22} w_{13} + w_{21} w_{32} w_{13} + w_{31} w_{12} w_{23} - w_{11} w_{32} w_{23} - w_{21} w_{12} w_{33} + w_{11} w_{22} w_{33})) \mu_3) = 0. \end{aligned}$$

Lai vienkāršotu, mēs varam uzrakstīt raksturīgo vienādojumu kā

$$-\lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + C = 0, \quad (3.14)$$

kur

$$\begin{aligned}
A &= -(v_1 + v_2 + v_3) + g_1 w_{11} \mu_1 + g_2 w_{22} \mu_2 + g_3 w_{33} \mu_3, \\
B &= \mu_1 \mu_2 w_{31} w_{13} g_1 g_3 - \mu_2 \mu_3 w_{32} w_{23} g_2 g_3 + \mu_1 \mu_2 w_{21} w_{12} g_1 g_2 \\
&\quad - (\mu_2 w_{22} g_2 - v_2)(\mu_3 w_{33} g_3 - v_3) - (\mu_1 w_{11} g_1 - v_1)(\mu_3 w_{33} g_3 - v_3) \\
&\quad - (\mu_1 w_{11} g_1 - v_1)(\mu_2 w_{22} g_2 - v_2), \\
C &= (\mu_1 w_{11} g_1 - v_1)(\mu_2 w_{22} g_2 - v_2)(\mu_3 w_{33} g_3 - v_3) + \mu_1 \mu_2 \mu_3 w_{21} w_{32} w_{23} g_1 g_2 g_3 \\
&\quad + \mu_1 \mu_2 \mu_3 w_{31} w_{12} w_{23} g_1 g_2 g_3 - \mu_1 \mu_3 w_{31} w_{13} g_1 g_3 (\mu_2 w_{22} g_2 - v_2) \\
&\quad - \mu_2 \mu_3 w_{32} w_{23} g_2 g_3 (\mu_1 w_{11} g_1 - v_1) - \mu_1 \mu_2 w_{21} w_{12} g_1 g_2 (\mu_3 w_{33} g_3 - v_3).
\end{aligned}$$

### 3.1.1 Fakti

**3.1. piezīme.** Vektoru lauks  $(f_1(x_1, x_2, x_3), f_2(x_1, x_2, x_3), f_3(x_1, x_2, x_3))$ , kur  $f_1, f_2$  un  $f_3$  ir vienādojumu (3.9) labās puses, uz iekšpusi vērsts domēna robežās  $Q_3 := \{(x_1, x_2, x_3) : 0 < x_1 < \frac{1}{v_1}, 0 < x_2 < \frac{1}{v_2}, 0 < x_3 < \frac{1}{v_3}\}$ .

**3.2. piezīme.** Sistēmai (3.9) eksistē vismaz viens kritiskais punkts. Visi kritiskie punkti atrodas  $Q_3 := \{(x_1, x_2, x_3) : 0 < x_1 < \frac{1}{v_1}, 0 < x_2 < \frac{1}{v_2}, 0 < x_3 < \frac{1}{v_3}\}$ .

## 3.2 Kritiskie punkti

Trīs-dimensiju sistēmai ir trīs īpašvērtības. Pastāv divas iespējas: vai nu trīs īpašvērtības ir reālas, vai divas no tām ir kompleksi saistītas. Kritiskais punkts ir stabils, ja visām īpašvērtībām ir negatīvas reālās daļas; tas ir nestabils, ja vismaz vienai īpašvērtībai ir pozitīva reālā daļa.

- **Mezgli.** Visas īpašvērtības ir reālas un tām ir viena un tā pati zīme. Mezgli ir stabils (nestabils), ja īpašvērtības ir negatīvas (pozitīvas) [97].
- **Segls.** Visas īpašvērtības ir reālas, un vismaz viena no tām ir pozitīva un pārējās ir negatīvas. Segli vienmēr ir nestabili [97].
- **Fokuss – Mezgli.** Ir viena reāla īpašvērtība un kompleksi saistītas īpašvērtības. Visām īpašvērtībām reālajai daļai ir viena un tā pati zīme. Kritiskais punkts ir stabils (nestabils), ja īpašvērtības ir negatīvas (pozitīvas) [97].
- **Segls – Fokuss.** Negatīvā reālā īpašvērtība un kompleksi saistītas īpašvērtības ar pozitīvu reālo daļu (nestabils fokuss) un pozitīvā reālā īpašvērtība un kompleksi saistītas īpašvērtības ar negatīvu reālo daļu (stabils fokuss). Šāda veida kritiskais punkts ir nestabils [46].

## 3.3 Haoss

Sengrieķu valodā haoss ir pirms Visuma radīšanas apjukums. Fiziķi šo zinātni sauc par “nelineāro dinamiku”, matemātiķi - “haosa teorija”, visi pārējie - “nelineārā zinātne”. Haoss ir parādība, kuru nav viegli klasificēt vai identificēt. Nav vispārpieņemtas haosa definīcijas, bet ir haosa īpašības [39].

## Haosa īpašības

- Haotiskas uzvedības īpašība ir atraktora esamība, kuram visi pietiekami tuvu atrisinājumi tiecas pietiekami ilgā laika periodā [23].
- Tipiska haotisku atrisinājumu īpašība ir atraktoru ģeometriskā forma. Atraktori parasti ir savīti un “dīvaini”, tas nozīmē, ka tiem ir daļēja (fraktālu) dimensija, lai gan tas ne vienmēr tā ir [23].
- Jutība pret sākumnosacījumiem [39].

**3.1. definīcija.** *Haotiska sistēma ir deterministiska sistēma, kas izrāda neregulāro un neparedzamu uzvedību [47].*

Haotisku sistēmu pētījumiem bija praktiska ietekme, kopš Edvards Nortons Lorencs izveidoja haosa teoriju 1963. gadā. Haotiska dinamika ir ļoti svarīga dažādās jomās, piemēram, robotikā, ekonomikā, kriptogrāfijā, ķīmijā, medicīnā (pētot epilepsiju, lai prognozētu krampjus, ņemot vērā sākotnējo organisma stāvokli) un bioloģijā (pētot nevienmērīgu sirdsdarbības ātrumu) [49].

**3.3. piezīme.** *Dinamiskajās sistēmās, kas satur trīs vai vairāk vienādojumus, var būt dīvaini (haotiski) atraktori.*

Floris Takens (1940-2010) ir holandiešu matemātiķis, kas pazīstams ar ieguldījumu diferenciālvienādojumu teorijā, dinamisko sistēmu teorijā, haosa teorijā, šķidrumu mehānikā. Ieviesa “dīvaina atraktora” jēdzienu. Viņš bija pirmais, kurš parādīja, ka haotiskus atraktorus var pētīt ar neironu tīklu palīdzību [7].

**3.4. piezīme.** *Diferenciālvienādojumu sistēmās ir iespējams atrast haotisku atraktoru, ja ir haotiska uzvedība [55].*

**3.2. definīcija.** *Dīvains atraktors (haotiskais atraktors, fraktālu atraktors) ir atraktors, kas ir jutīgs pret sākumnosacījumiem [39].*

**3.3. definīcija.** *Fraktālis ir objekts, kas parāda sevis līdzību palielinājumam, un to var izveidot, izmantojot vienkāršu motīvu (attēli atkārtojas arvien samazinātos mērogos) [39].*

## 3.4 Ļapunova eksponenti

Ļapunova eksponents ir svarīgs rīks, lai raksturotu ierobežotas dimensijas nelineāras dinamiskas sistēmas atraktorus un to pārmērīgo jutību pret sākumnosacījumiem [19]. Ļapunova eksponenti ir pieeja haosa noteikšanai [47].

Saikne starp Ļapunova eksponentiem un atraktoru īpašībām un to veidiem:

1. Viendimensijas sistēma. Šajā gadījumā atraktors var būt tikai stabils fiksēts punkts. Eksistē viens negatīvs Ļapunova eksponents (īsumā LE), ko apzīmē ar  $LE_1 = (-)$ .



2. Divdimensiju sistēma. 2D sistēmām ir divu veidu atraktori: stabili fiksēti punkti un robežcikli. Atbilstošie LE ir šādi:

- $(LE_1, LE_2) = (-, -)$  - stabils fiksēts punkts;
- $(LE_1, LE_2) = (0, -)$  - stabils robežcikls (viens eksponents ir negatīvs).

3. Trīsdimensiju sistēma. 3D fāzes telpā pastāv četru veidu atraktori: stabili punkti, robežcikli, 2D tori un dīvaini atraktori. Šāda LE kopa raksturo iespējamās dinamiskās situācijas, kas ir:

- $(LE_1, LE_2, LE_3) = (-, -, -)$  - stabils fiksēts punkts;
- $(LE_1, LE_2, LE_3) = (0, -, -)$  - stabils robežcikls;
- $(LE_1, LE_2, LE_3) = (0, 0, -)$  - stabils 2D torus;
- $(LE_1, LE_2, LE_3) = (+, 0, -)$  - dīvains atraktors.

### 3.4.1 Ļapunova eksponentu īpašības

1. Ļapunova eksponentu skaits ir vienāds ar fāžu telpas dimensiju vai diferenciālvienādojumu sistēmas kārtu. Tie ir sakārtoti dilstošā secībā [79].
2. Lielākais stabilas sistēmas Ļapunova eksponents nepārsniedz nulli [47].
3. Haotiskai sistēmai ir vismaz viens pozitīvs Ļapunova eksponents, jo lielāks ir lielākais pozitīvs Ļapunova eksponents, jo neparedzamākie ir sistēmas atrisinājumi [47].
4. Disipatīvai sistēmai visu Ļapunova eksponentu summa ir vienāda ar negatīvu skaitli [79].
5. Hiperhaotiska sistēma tiek definēta kā haotiska sistēma, kurā ir vismaz divi pozitīvi Ļapunova eksponenti. Kopā ar vienu nulles eksponentu un vienu negatīvu eksponentu, minimālā dimensija hiperhaotiskai sistēmai ir četri [86].

**3.5. piezīme.** *Tikai disipatīvai sistēmai eksistē atraktori [46].*

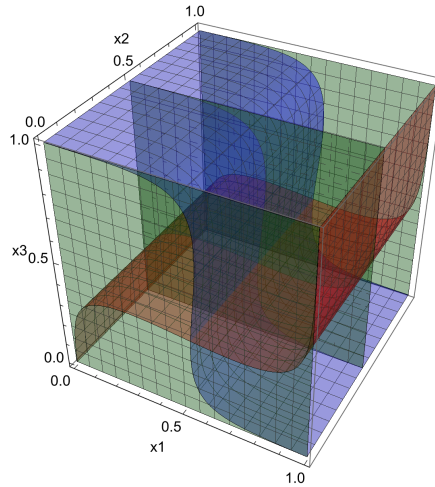
Promocijas darbā, lai aprēķinātu Ļapunova eksponentus, tika izmantota pakotne “Ice.m for Mathematica” [99]. Kā arī cita Wolfram Mathematica programma “Lynch-DSAM.nb”, lai pārbaudītu rezultātus un to pareizību [39].

## 3.5 Piemēri

### 3.5.1 Periodiskie atrisinājumi

**1. piemērs.** Aplūkosim  $\mu_1 = 5$ ,  $\mu_2 = 15$ ,  $\mu_3 = 5$ ,  $v_1 = v_2 = v_3 = 1$  un  $\theta_1 = 1.2$ ,  $\theta_2 = 0.5$ ,  $\theta_3 = -0.6$ . Sistēmas (3.9) regulējošā matrica ir

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$



**3.1. zīm.** Sistēmas (3.9) ar regulējošo matricu (3.15) izoklīnas  $x_1$  - sarkana,  $x_2$  - zaļa,  $x_3$  - zila.

Izoklīnas ir attēlotas 3.1. zīm. Eksistē trīs kritiskie punkti.

Raksturīgais vienādojums, kurš atbilst kritiskajam punktam (0.537; 0.001; 0.346)

$$-\lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + C = 0, \quad (3.16)$$

kur  $A = -0.616403$ ,  $B = -5.28938$  un  $C = -5.61417$ .

Atrisinot vienādojumu, iegūstam  $\lambda_1 = -0.99$ ,  $\lambda_{2,3} = 0.188 \pm 2.371i$ . Kritiskā punkta veids ir segls-fokuss.

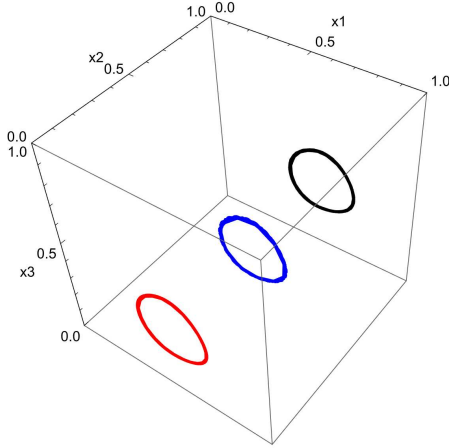
Kritiskā punkta (0.537; 0.5; 0.346) raksturīgais vienādojums ir (3.16), kur  $A = 3.125$ ,  $B = -6.693$  un  $C = 15.569$ .

Atrisinot vienādojumu, iegūstam  $\lambda_1 = 2.75$ ,  $\lambda_{2,3} = 0.187 \pm 2.371i$ . Kritiskā punkta veids ir nestabils fokuss-mezglis.

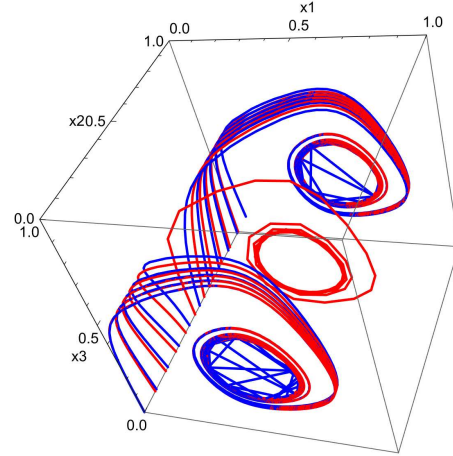
Kritiskā punkta (0.537; 0.99; 0.346) raksturīgais vienādojums ir (3.16), kur  $A = -0.6164$ ,  $B = -5.289$  un  $C = -5.614$ .

Atrisinot vienādojumu, iegūstam  $\lambda_1 = -0.995$ ,  $\lambda_{2,3} = 0.187 \pm 2.371i$ . Kritiskā punkta veids ir nestabils segls-fokuss.

Šajā piemērā ir trīs periodiskie atrisinājumi. Periodiskie atrisinājumi ir stabili atraktori.



**3.2. zīm.** Sistēmā (3.9) ar regulējošo matricu (3.15) divu 3D robežciklu piemērs.



**3.3. zīm.** Sistēmas (3.9) ar regulējošo matricu (3.15) trīs periodiskie atrisinājumi.

### 3.6 Haotiskie atraktori

Aplūkosim

$$\mu_1 = \mu_2 = 7, \mu_3 = 13, v_1 = 0.65, v_2 = 0.42, v_3 = 0.1, \theta_1 = 0.5, \theta_2 = 0.3, \theta_3 = 0.7 \quad (3.17)$$

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5.65 \\ 1 & 0 & 0.135 \\ 1 & 0.02 & 0.03 \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

Sākumnosacījumi ir

$$x_1(0) = 0.3; x_2(0) = 1.5; x_3(0) = 0.2. \quad (3.19)$$

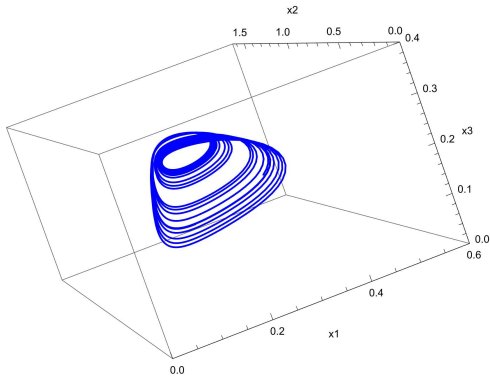
Kritiskā punkta (0.370457; 1.59272; 0.222436) raksturīgais vienādojums ir

$$-\lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + C = 0,$$

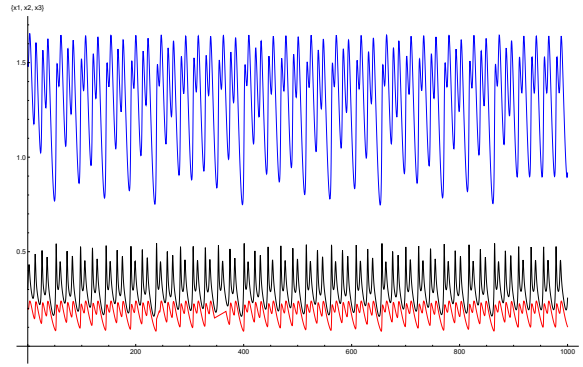
kur  $A = -1.16152$ ,  $B = -0.430187$  un  $C = -0.688906$ .

Atrisinot vienādojumu, iegūstam  $\lambda_1 = -1.2558$ ,  $\lambda_{2,3} = 0.0471391 \pm 0.739161i$ . Kritiskā punkta veids ir nestabils segls-fokuss. Sistēma ir haotiska tādā nozīmē, ka atrisinājumi uzrāda neregulāro uzvedību.

Attiecīgā trīs-dimensiju sistēma tika pētīta [13], [14].



**3.4. zīm.** Sistēmas (3.9) ar regulējošo matricu (3.18) haotisks atraktors.



**3.5. zīm.** Sistēmas (3.9) ar regulējošo matricu (3.18) atrisinājumu  $x_i(t)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , grafiki.

Regulējošajā matricā (3.18) mainīsim parametru  $w_{23}$ . Viena kritiskā punkta koordinātas un īpašvērtības ir aprēķinātas. Aprēķini tiek veikti, izmantojot Wolfram Mathematica.

**1. tabula.** Sistēmas (3.9) un regulējošās matricas (3.18) aprēķinu rezultāti, mainot parametru  $w_{23}$ .

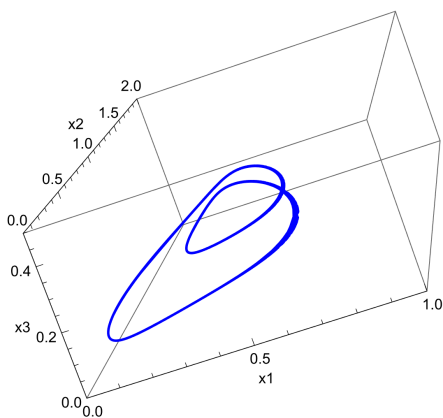
$w_{23}$	$x^*$	$y^*$	$z^*$	Real $\lambda$	Complex $\lambda$ $\mathbb{R}$ part	Complex $\lambda$ im part
0.0	0.3651	1.4571	0.1989	-1.4269	0.1322	0.6634
0.05	0.3671	1.5057	0.2073	-1.3714	0.1047	0.6886
0.10	0.3691	1.5562	0.2161	-1.3069	0.0726	0.71698
0.12	0.3699	1.57699	0.2197	-1.2783	0.0583	0.7294
0.13	0.3703	1.5875	0.2215	-1.2634	0.0519	0.7359
0.132	0.3703	1.5895	0.2219	-1.2604	0.0494	0.7371
0.133	0.3704	1.5906	0.2221	-1.2589	0.0487	0.7378
0.134	0.3704	1.5917	0.2223	-1.2573	0.0479	0.7385
0.136	0.3705	1.5938	0.2226	-1.2589	0.0487	0.7378
0.137	0.3705	1.5948	0.2228	-1.2527	0.0456	0.7405
0.138	0.3706	1.5959	0.22299	-1.2512	0.0448	0.7412
0.139	0.3706	1.5969	0.2232	-1.2494	0.0441	0.7418
0.14	0.3706	1.59799	0.2234	-1.2481	0.0433	0.7425
0.145	0.3708	1.6033	0.2243	-1.2403	0.0394	0.7459
0.15	0.3710	1.6087	0.2252	-1.2324	0.0354	0.7493
0.16	0.3714	1.6192	0.2270	-1.2162	0.0274	0.7564
0.18	0.3721	1.6406	0.2308	-1.1826	0.0107	0.7711
0.19	0.3725	1.6514	0.2326	-1.1652	0.002	0.7787
0.20	0.3729	1.6622	0.2345	-1.1473	-0.0069	0.7867

**2. tabula.** Sistēmas (3.9) un regulējošās matricas (3.18) Ļapunova ekponenti, 8000 soļi

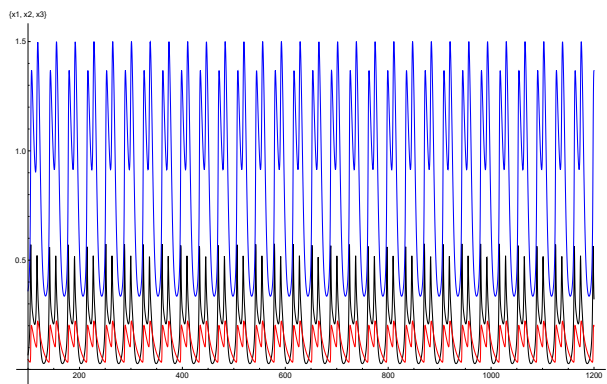
$w_{23}$	$LE_1$	$LE_2$	$LE_3$	$LE_1 + LE_2 + LE_3$
0.0	0.00228824	-0.133556	-1.03537	-1.16664
0.13	0.00174998	-0.0409256	-1.12505	-1.16423
0.132	0.00241997	-0.0284958	-1.13784	-1.16392
0.133	0.00405175	0.00091658	-1.16866	-1.1637
0.134	0.0200966	0.000487689	-1.18412	-1.16354
0.135	0.0162669	0.000848416	-1.18055	-1.16343
0.136	0.00335708	-0.0065914	-1.16009	-1.16332
0.137	-0.000688284	-0.0214113	-1.14116	-1.16326
0.19	-0.00174416	-0.0102177	-1.14928	-1.16124
0.20	-0.00816703	-0.0105543	-1.14236	-1.16108
1	-0.373617	-0.37358	-0.409939	-1.15714

Aprēķinu rezultāti:

- ja  $0 \leq w_{23} < 0.132$ , tad sistēmai (3.18) ir periodiskais atrisinājums;
- ja  $0.133 < w_{23} \leq 0.135$ , tad sistēmai (3.18) ir haotiskais atrisinājums;
- ja  $0.136 < w_{23} \leq 0.19$ , tad sistēmai (3.18) ir periodiskais atrisinājums;
- ja  $w_{23} > 0.2$ , tad sistēmai (3.18) ir stabils fiksēts punkts.



**3.6. zīm.** Sistēmas (3.9) ar regulējošo matricu (3.18) periodisks atrisinājums,  $w_{23} = 0.05$ .



**3.7. zīm.** Sistēmas (3.9) ar regulējošo matricu (3.18) atrisinājumu  $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ , grafiki,  $w_{23} = 0.05$ .

Regulējošajā matricā (3.18) mainīsim parametru  $w_{32}$ .

**3. tabula.** Sistēmas (3.9) un regulējošās matricas (3.18) aprēķinu rezultāti, mainot parametru  $w_{32}$ .

$w_{23}$	$x^*$	$y^*$	$z^*$	Real $\lambda$	Complex $\lambda$ $\mathbb{R}$ part	Complex $\lambda$ im part
0.0	0.4092	1.7387	0.2449	-1.036	-0.0623	0.8666
0.01	0.3892	1.6656	0.2337	-1.1554	-0.0029	0.7966
0.03	0.3530	1.5213	0.2114	-1.3366	0.0873	0.6912
0.04	0.3368	1.4523	0.2007	-1.3996	0.1186	0.6507

**4. tabula.** Sistēmas (3.9) un regulējošās matricas (3.18) Ļapunova ekponenti, 8000 soļi

$w_{23}$	$LE_1$	$LE_2$	$LE_3$	$LE_1 + LE_2 + LE_3$
0.0	-0.063377	-0.0643758	-0.406599	-1.16067
0.01	-0.00456357	-0.00807802	-1.14848	-1.16113
0.02	0.0162669	0.000848416	-1.18055	-1.16343
0.03	0.0015434	-0.186553	-0.980366	-1.16538
0.04	0.00381232	-0.0985729	-1.07168	-1.16644

Aprēķinu rezultāti:

- ja  $0 \leq w_{32} \leq 0.01$ , tad sistēmai (3.18) ir stabils fiksēts punkts;
- ja  $w_{32} = 0.02$ , tad sistēmai (3.18) ir haotiskais atrisinājums;
- ja  $0.03 \leq w_{32} \leq 0.04$ , tad sistēmai (3.18) ir periodiskais atrisinājums.

No aprēķiniem redzam, ka nelielas izmaiņas parametru vērtībās, maina sistēmas atrisinājumu uzvedību.

## 4 Četru-dimensiju (4D) sistēmas

Aplūkosim četru-dimensiju sistēmu

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{1 + e^{-\mu_1(w_{11}x_1 + w_{12}x_2 + w_{13}x_3 + w_{14}x_4 - \theta_1)}} - v_1x_1, \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{1 + e^{-\mu_2(w_{21}x_1 + w_{22}x_2 + w_{23}x_3 + w_{24}x_4 - \theta_2)}} - v_2x_2, \\ \frac{dx_3}{dt} = \frac{1}{1 + e^{-\mu_3(w_{31}x_1 + w_{32}x_2 + w_{33}x_3 + w_{34}x_4 - \theta_3)}} - v_3x_3, \\ \frac{dx_4}{dt} = \frac{1}{1 + e^{-\mu_4(w_{41}x_1 + w_{42}x_2 + w_{43}x_3 + w_{44}x_4 - \theta_4)}} - v_4x_4. \end{cases} \quad (4.20)$$

Izoklīnas ir

$$\begin{cases} v_1x_1 = \frac{1}{1 + e^{-\mu_1(w_{11}x_1 + w_{12}x_2 + w_{13}x_3 + w_{14}x_4 - \theta_1)}}}, \\ v_2x_2 = \frac{1}{1 + e^{-\mu_2(w_{21}x_1 + w_{22}x_2 + w_{23}x_3 + w_{24}x_4 - \theta_2)}}}, \\ v_3x_3 = \frac{1}{1 + e^{-\mu_3(w_{31}x_1 + w_{32}x_2 + w_{33}x_3 + w_{34}x_4 - \theta_3)}}}, \\ v_4x_4 = \frac{1}{1 + e^{-\mu_4(w_{41}x_1 + w_{42}x_2 + w_{43}x_3 + w_{44}x_4 - \theta_4)}}}. \end{cases} \quad (4.21)$$

Kritiskie punkti ir sistēmas (4.21) atrisinājumi.

## 4.1 Lineārizētā sistēma

Kritiskā punkta  $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*)$  lineārizēta sistēma ir

$$\begin{cases} u_1' = -v_1 u_1 + \mu_1 w_{11} g_1 u_1 + \mu_1 w_{12} g_1 u_2 + \mu_1 w_{13} g_1 u_3 + \mu_1 w_{14} g_1 u_4, \\ u_2' = -v_2 u_2 + \mu_2 w_{21} g_2 u_1 + \mu_2 w_{22} g_2 u_2 + \mu_2 w_{23} g_2 u_3 + \mu_2 w_{24} g_2 u_4, \\ u_3' = -v_3 u_3 + \mu_3 w_{31} g_3 u_1 + \mu_3 w_{32} g_3 u_2 + \mu_3 w_{33} g_3 u_3 + \mu_3 w_{34} g_3 u_4, \\ u_4' = -v_4 u_4 + \mu_4 w_{41} g_4 u_1 + \mu_4 w_{42} g_4 u_2 + \mu_4 w_{43} g_4 u_3 + \mu_4 w_{44} g_4 u_4, \end{cases}$$

kur

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{e^{-\mu_1(w_{11}x_1^* + w_{12}x_2^* + w_{13}x_3^* + w_{14}x_4^* - \theta_1)}}{[1 + e^{-\mu_1(w_{11}x_1^* + w_{12}x_2^* + w_{13}x_3^* + w_{14}x_4^* - \theta_1)}]^2}, \\ g_2 &= \frac{e^{-\mu_2(w_{21}x_1^* + w_{22}x_2^* + w_{23}x_3^* + w_{24}x_4^* - \theta_2)}}{[1 + e^{-\mu_2(w_{21}x_1^* + w_{22}x_2^* + w_{23}x_3^* + w_{24}x_4^* - \theta_2)}]^2}, \\ g_3 &= \frac{e^{-\mu_3(w_{31}x_1^* + w_{32}x_2^* + w_{33}x_3^* + w_{34}x_4^* - \theta_3)}}{[1 + e^{-\mu_3(w_{31}x_1^* + w_{32}x_2^* + w_{33}x_3^* + w_{34}x_4^* - \theta_3)}]^2}, \\ g_4 &= \frac{e^{-\mu_4(w_{41}x_1^* + w_{42}x_2^* + w_{43}x_3^* + w_{44}x_4^* - \theta_4)}}{[1 + e^{-\mu_4(w_{41}x_1^* + w_{42}x_2^* + w_{43}x_3^* + w_{44}x_4^* - \theta_4)}]^2}. \end{aligned}$$

Raksturīgais vienādojums ir

$$\lambda^4 + A\lambda^3 + B\lambda^2 + M\lambda + L = 0, \quad (4.22)$$

kur

$$\begin{aligned} A &= (v_1 + v_2 + v_3 + v_4) - g_1 w_{11} \mu_1 - g_2 w_{22} \mu_2 - g_3 w_{33} \mu_3 - g_4 w_{44} \mu_4, \\ B &= v_3 v_4 - g_1 v_3 w_{11} \mu_1 - g_1 v_4 w_{11} \mu_1 - g_2 v_3 w_{22} \mu_2 - g_2 v_4 w_{22} \mu_2 - g_1 g_2 w_{21} w_{12} \mu_1 \mu_2 \\ &\quad + g_1 g_2 w_{11} w_{22} \mu_1 \mu_2 - g_3 v_4 w_{33} \mu_3 - g_1 g_3 w_{31} w_{13} \mu_1 \mu_3 + g_1 g_3 w_{11} w_{33} \mu_1 \mu_3 \\ &\quad - g_2 g_3 w_{32} w_{23} \mu_2 \mu_3 + g_2 g_3 w_{22} w_{33} \mu_2 \mu_3 - g_1 g_4 w_{41} \mu_1 \mu_4 w_{14} - g_2 g_4 w_{42} \mu_2 \mu_4 w_{24} \\ &\quad - g_3 g_4 w_{43} \mu_3 \mu_4 w_{34} - g_4 v_3 \mu_4 w_{44} + g_1 g_4 w_{11} \mu_1 \mu_4 w_{44} + g_2 g_4 w_{22} \mu_2 \mu_4 w_{44} + g_3 g_4 w_{33} \mu_3 \mu_4 w_{44} \\ &\quad + v_2 (v_3 + v_4 - g_1 w_{11} \mu_1 - g_3 w_{33} \mu_3 - g_4 w_{44} \mu_4) + v_1 (v_2 + v_3 + v_4 - g_2 w_{22} \mu_2 - g_3 w_{33} \mu_3 - g_4 w_{44} \mu_4), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M = & -g_1v_3v_4w_{11}\mu_1 - g_2v_3v_4w_{22}\mu_2 - g_1g_2v_3w_{21}w_{12}\mu_1\mu_2 - g_1g_2v_4w_{21}w_{12}\mu_1\mu_2 \\
& + g_1g_2v_3w_{11}w_{22}\mu_1\mu_2 + g_1g_2v_4w_{11}w_{22}\mu_1\mu_2 - g_1g_3v_4w_{31}w_{13}\mu_1\mu_3 \\
& + g_1g_3v_4w_{11}w_{33}\mu_1\mu_3 - g_2g_3v_4w_{32}w_{23}\mu_2\mu_3 + g_2g_3v_4w_{22}w_{33}\mu_2\mu_3 \\
& + g_1g_2g_3w_{31}w_{22}w_{13}\mu_1\mu_2\mu_3 - g_1g_2g_3w_{21}w_{32}w_{13}\mu_1\mu_2\mu_3 - g_1g_2g_3w_{31}w_{12}w_{23}\mu_1\mu_2\mu_3 \\
& + g_1g_2g_3w_{11}w_{32}w_{23}\mu_1\mu_2\mu_3 + g_1g_2g_3w_{21}w_{12}w_{33}\mu_1\mu_2\mu_3 - g_1g_2g_3w_{11}w_{22}w_{33}\mu_1\mu_2\mu_3 \\
& - g_1g_4v_3w_{41}\mu_1\mu_4w_{14} + g_1g_2g_4w_{41}w_{22}\mu_1\mu_2\mu_4w_{14} - g_1g_2g_4w_{21}w_{42}\mu_1\mu_2\mu_4w_{14} \\
& + g_1g_3g_4w_{41}w_{33}\mu_1\mu_3\mu_4w_{14} - g_1g_3g_4w_{31}w_{43}\mu_1\mu_3\mu_4w_{14} - g_2g_4v_3w_{42}\mu_2\mu_4w_{24} \\
& - g_1g_2g_4w_{41}w_{12}\mu_1\mu_2\mu_4w_{24} + g_1g_2g_4w_{11}w_{42}\mu_1\mu_2\mu_4w_{24} + g_2g_3g_4w_{42}w_{33}\mu_2\mu_3\mu_4w_{24} \\
& - g_2g_3g_4w_{32}w_{43}\mu_2\mu_3\mu_4w_{24} - g_1g_3g_4w_{41}w_{13}\mu_1\mu_3\mu_4w_{34} + g_1g_3g_4w_{11}w_{43}\mu_1\mu_3\mu_4w_{34} \\
& - g_2g_3g_4w_{42}w_{23}\mu_2\mu_3\mu_4w_{34} + g_2g_3g_4w_{22}w_{43}\mu_2\mu_3\mu_4w_{34} + g_1g_4v_3w_{11}\mu_1\mu_4w_{44} \\
& + g_2g_4v_3w_{22}\mu_2\mu_4w_{44} + g_1g_2g_4w_{21}w_{12}\mu_1\mu_2\mu_4w_{44} - g_1g_2g_4w_{11}w_{22}\mu_1\mu_2\mu_4w_{44} \\
& + g_1g_3g_4w_{31}w_{13}\mu_1\mu_3\mu_4w_{44} - g_1g_3g_4w_{11}w_{33}\mu_1\mu_3\mu_4w_{44} + g_2g_3g_4w_{32}w_{23}\mu_2\mu_3\mu_4w_{44} \\
& - g_2g_3g_4w_{22}w_{33}\mu_2\mu_3\mu_4w_{44} + v_1(v_3v_4 - g_2v_3w_{22}\mu_2 - g_2v_4w_{22}\mu_2 - g_3v_4w_{33}\mu_3 \\
& - g_2g_3w_{32}w_{23}\mu_2\mu_3 + g_2g_3w_{22}w_{33}\mu_2\mu_3 - g_2g_4w_{42}\mu_2\mu_4w_{24} \\
& - g_3g_4w_{43}\mu_3\mu_4w_{34} - g_4v_3\mu_4w_{44} + g_2g_4w_{22}\mu_2\mu_4w_{44} \\
& + g_3g_4w_{33}\mu_3\mu_4w_{44} + v_2(v_3 + v_4 - g_3w_{33}\mu_3 - g_4\mu_4w_{44})) \\
& + v_2(v_3(v_4 - g_1w_{11}\mu_1 - g_4\mu_4w_{44}) - g_1\mu_1(v_4w_{11} + g_3w_{31}w_{13}\mu_3 - g_3w_{11}w_{33}\mu_3 + g_4w_{41}\mu_4w_{14} \\
& - g_4w_{11}\mu_4w_{44}) - g_3\mu_3(v_4w_{33} + g_4w_{43}\mu_4w_{34} - g_4w_{33}\mu_4w_{44})),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L = & v_1(v_2(v_3(v_4 - g_4\mu_4w_{44}) - g_3\mu_3(v_4w_{33} + g_4w_{43}\mu_4w_{34} - g_4w_{33}\mu_4w_{44})) \\
& - g_2\mu_2(v_3(v_4w_{22} + g_4\mu_4(w_{42}w_{24} - w_{22}w_{44})) + g_3\mu_3(v_4(w_{32}w_{23} - w_{22}w_{33}) \\
& + g_4\mu_4(-w_{42}w_{33}w_{24} + w_{32}w_{43}w_{24} + w_{42}w_{23}w_{34} - w_{22}w_{43}w_{34} - w_{32}w_{23}w_{44} + w_{22}w_{33}w_{44})))) \\
& - g_1\mu_1(v_2(v_3(v_4w_{11} + g_4\mu_4(w_{41}w_{14} - w_{11}w_{44})) + g_3\mu_3(v_4(w_{31}w_{13} - w_{11}w_{33}) \\
& + g_4\mu_4(-w_{41}w_{33}w_{14} + w_{31}w_{43}w_{14} + w_{41}w_{13}w_{34} - w_{11}w_{43}w_{34} - w_{31}w_{13}w_{44} + w_{11}w_{33}w_{44}))) \\
& + g_2\mu_2(v_3(v_4(w_{21}w_{12} - w_{11}w_{22})) \\
& + g_4\mu_4(-w_{41}w_{22}w_{14} + w_{21}w_{42}w_{14} + w_{41}w_{12}w_{24} - w_{11}w_{42}w_{24} - w_{21}w_{12}w_{44} + w_{11}w_{22}w_{44})) \\
& + g_3\mu_3(v_4(-w_{31}w_{22}w_{13} + w_{21}w_{32}w_{13} + w_{31}w_{12}w_{23} - w_{11}w_{32}w_{23} - w_{21}w_{12}w_{33} + w_{11}w_{22}w_{33}) \\
& + g_4\mu_4(-w_{21}w_{42}w_{33}w_{14} + w_{21}w_{32}w_{43}w_{14} + w_{11}w_{42}w_{33}w_{24} - w_{11}w_{32}w_{43}w_{24} \\
& + w_{21}w_{42}w_{13}w_{34} - w_{11}w_{42}w_{23}w_{34} - w_{21}w_{12}w_{43}w_{34} + w_{11}w_{22}w_{43}w_{34} \\
& + w_{41}(-w_{32}w_{23}w_{14} + w_{22}w_{33}w_{14} + w_{32}w_{13}w_{24} - w_{12}w_{33}w_{24} - w_{22}w_{13}w_{34} + w_{12}w_{23}w_{34}) \\
& - w_{21}w_{32}w_{13}w_{44} + w_{11}w_{32}w_{23}w_{44} + w_{21}w_{12}w_{33}w_{44} - w_{11}w_{22}w_{33}w_{44} \\
& + w_{31}(w_{42}w_{23}w_{14} - w_{22}w_{43}w_{14} - w_{42}w_{13}w_{24} + w_{12}w_{43}w_{24} + w_{22}w_{13}w_{44} - w_{12}w_{23}w_{44}))))).
\end{aligned}$$

## 4.2 Kritiskie punkti

Četru-dimensiju sistēmai ir četras īpašvērtības.

- **4D mezgls.** Visas īpašvērtības ir reālās un tām ir viena un tā pati zīme. Mezgls ir stabils (nestabils), ja īpašvērtības ir negatīvas (pozitīvas).
- **4D zvaigzne.** Visas īpašvērtības ir vienādas. 4D zvaigzne ir stabila (nestabila), ja īpašvērtības ir negatīvas (pozitīvas).



- **Segls.** Visas īpašvērtības ir reālās, un vismaz viena no tām ir pozitīva un vismaz viena ir negatīva. Segli vienmēr ir nestabili.
- **Fokuss – Mezgls.** Ir divas reālās īpašvērtības un kompleksi saistītas īpašvērtības, un īpašvērtību reālās daļas ar vienu un to pašu zīmi. Kritiskais punkts ir stabils (nestabils), ja zīme ir negatīva (pozitīva).
- **Mezgls – Fokuss.** Ir divas reālās negatīvas īpašvērtības un kompleksi saistītas īpašvērtības ar pozitīvu reālo daļu. Kritiskais punkts ir nestabils.
- **Segls – Fokuss.** Divām reālajām īpašvērtībām ir dažādas zīmes un kompleksi saistītas īpašvērtības ar pozitīvu vai negatīvu reālo daļu. Kritiskais punkts ir nestabils.
- **Fokuss – Fokuss.** Divi kompleksi saistītie īpašvērtību pāri. Kritiskais punkts ir stabils, ja reālās daļas zīmes ir negatīvas. Kritiskais punkts ir nestabils, ja ir vismaz viena pozitīva reālā daļa.

### 4.3 Ļapunova eksponenti

Saikne starp Ļapunova eksponentiem un atrektoru īpašībām un to veidiem:

- $(LE_1, LE_2, LE_3, LE_4) = (-, -, -, -)$  - stabils fiksēts punkts;
- $(LE_1, LE_2, LE_3, LE_4) = (0, -, -, -)$  - periodiskie atrisinājumi;
- $(LE_1, LE_2, LE_3, LE_4) = (0, 0, -, -)$  - kvazi-periodiskie atrisinājumi;
- $(LE_1, LE_2, LE_3, LE_4) = (+, 0, -, -)$  - dīvains atraktors;
- $(LE_1, LE_2, LE_3, LE_4) = (+, +, 0, -)$  - hiper-haotiskais atraktors [40].

### 4.4 Piemēri

1. **piemērs.** Aplūkosim sistēmu (4.20) un regulējošo matricu

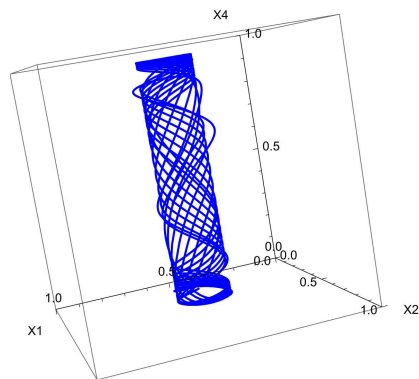
$$W = \begin{pmatrix} k_1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & k_2 \end{pmatrix}, \quad (4.23)$$

kur  $k_1 = 0.5$ ,  $k_2 = 1.815$  un  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 10$ ,  $v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = 1$ ,  $\theta_1 = 1.2$ ,  $\theta_2 = -0.7$ ,  $\theta_3 = 1.8$ ,  $\theta_4 = -0.28$

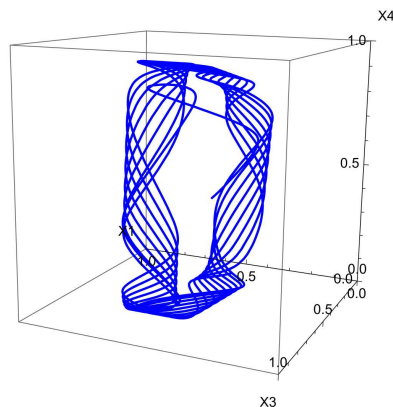
Sākumnosacījumi ir

$$x_1(0) = 0.5; x_2(0) = 0.32; x_3(0) = 0.4; x_4(0) = 0.39.$$

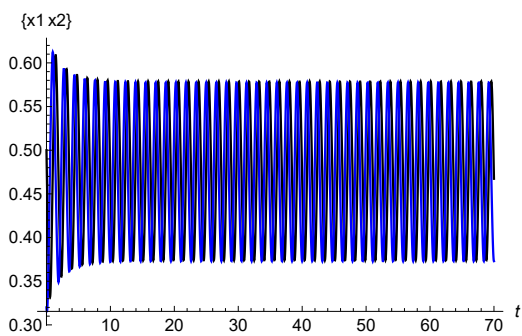
Šī sistēma sastāv no divām neatkarīgām divu-dimensiju sistēmām. Ir tieši viens kritiskais punkts. Standarta linearizācijas analīze sniedz īpašvērtības  $\lambda_{1,2} = 0.2469 \pm 4.9875i$ ;  $\lambda_{3,4} = 3.4667 \pm 4.9215i$ . Kritiskā punkta veids ir nestabils fokuss-fokuss.



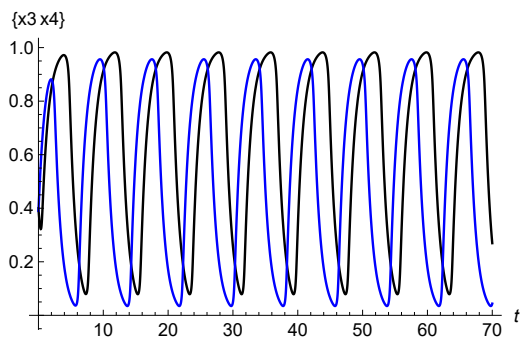
**4.1. zīm.** 4D trajektoriju 3D projekcija apakštelpā  $(x_1, x_2, x_4)$ .



**4.2. zīm.** 4D trajektoriju 3D projekcija apakštelpā  $(x_1, x_3, x_4)$ .



**4.3. zīm.** Sistēmas (4.20) ar regulējošo matricu (4.23) periodisko atrisinājumu  $(x_1(t), x_2(t))$  grafiki,  $k_1 = 0.5$  and  $k_2 = 1.815$ .



**4.4. zīm.** Sistēmas (4.20) ar regulējošo matricu (4.23) periodisko atrisinājumu  $(x_3(t), x_4(t))$ , grafiki,  $k_1 = 0.5$  and  $k_2 = 1.815$ .

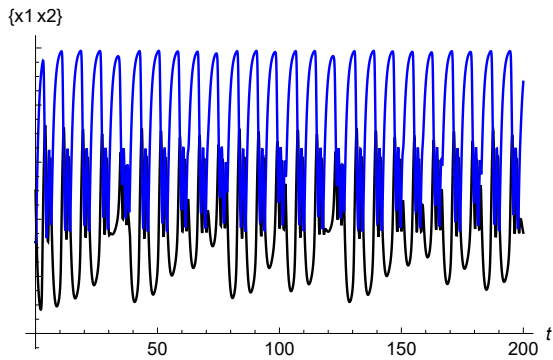
Mainīsim divus elementus  $(w_{14})$  un  $(w_{41})$ . Pieņemsim, ka  $w_{41} = 0.1$ ,  $(w_{14})$  vērtības ir apskatītas 5. tabulā.

**5. tabula.** Sistēmas (4.20) un regulējošās matricas (4.23) aprēķinu rezultāti, mainot parametru  $w_{14}$ .

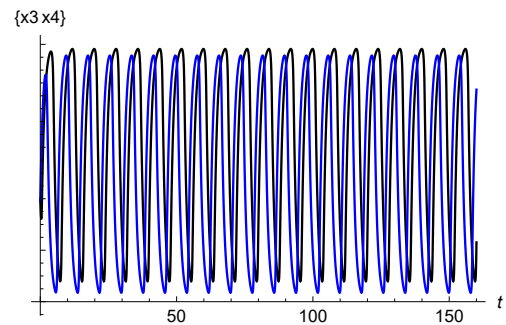
$w_{14}$	$\lambda_{1,2}$	$\lambda_{3,4}$	Lyapunov exponents
-1.2	$0.189 \pm 4.49i$	$3.374 \pm 4.912i$	(0; -0.48; -0.89; -0.96)
-1.1	$0.206 \pm 4.586i$	$3.379 \pm 4.908i$	(0; -0.70; -0.70; -0.87)
-1	$0.220 \pm 4.671i$	$3.384 \pm 4.905i$	(0.05; 0; -0.88; -0.98)
-0.9	$0.232 \pm 4.745i$	$3.389 \pm 4.902i$	(0; -0.27; -0.29; -0.89)
-0.8	$0.242 \pm 4.808i$	$3.394 \pm 4.899i$	(0; -0.05; -0.58; -0.88)
-0.7	$0.250 \pm 4.862i$	$3.399 \pm 4.897i$	(0.03; 0; -0.26; -0.89)
-0.6	$0.256 \pm 4.906i$	$3.405 \pm 4.896i$	(0; -0.20; -0.20; -0.89)
-0.5	$0.260 \pm 4.941i$	$3.410 \pm 4.894i$	(0; -0.09; -0.35; -0.89)
-0.4	$0.261 \pm 4.968i$	$3.415 \pm 4.893i$	(0; -0.13; -0.33; -0.89)

Aprēķinu rezultāti:

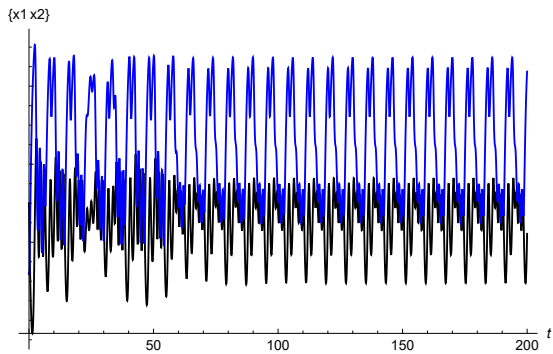
- ja  $-1.2 \leq w_{14} < -1$ , tad sistēmai (4.20) ar regulējošo matricu (4.23) ir periodiskais atrisinājums;
- ja  $w_{14} = -1$ , tad sistēmai (4.20) ar regulējošo matricu (4.23) ir haotiskais atrisinājums;
- ja  $-0.9 \leq w_{14} < -0.7$ , tad sistēmai (4.20) ar regulējošo matricu (4.23) ir periodiskais atrisinājums;
- ja  $w_{14} = -0.7$ , tad sistēmai (4.20) ar regulējošo matricu (4.23) ir haotiskais atrisinājums;
- ja  $-0.6 \leq w_{14} \leq -0.4$ , tad sistēmai (4.20) ar regulējošo matricu (4.23) ir periodiskais atrisinājums.



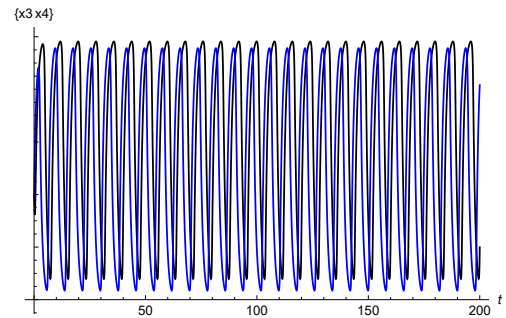
**4.5. zīm.** Sistēmas (4.20) ar regulējošo matricu (4.23) atrisinājumu  $(x_1(t), x_2(t))$ , grafiki,  $w_{14} = -1$ .



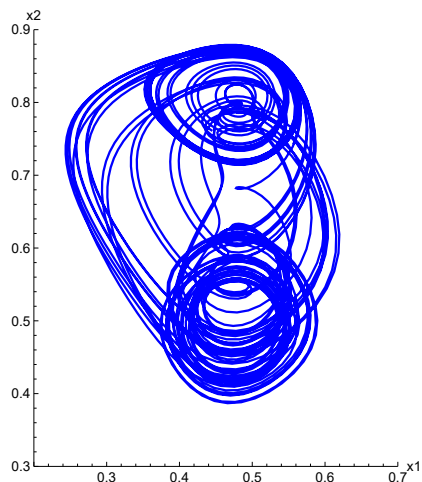
**4.6. zīm.** Sistēmas (4.20) ar regulējošo matricu (4.23) atrisinājumu  $(x_3(t), x_4(t))$ , grafiki,  $w_{14} = -1$ .



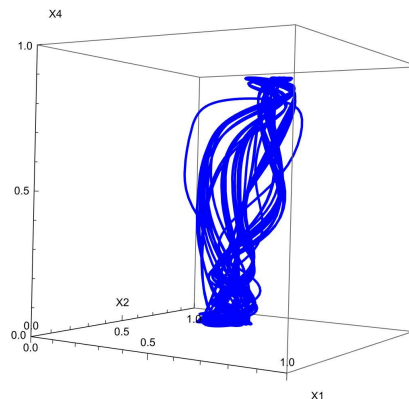
**4.7. zīm.** Sistēmas (4.20) ar regulējošo matricu (4.23) atrisinājumu  $(x_1(t), x_2(t))$ , grafiki,  $w_{14} = -0.7$



**4.8. zīm.** Sistēmas (4.20) ar regulējošo matricu (4.23) atrisinājumu  $(x_3(t), x_4(t))$ , grafiki,  $w_{14} = -0.7$

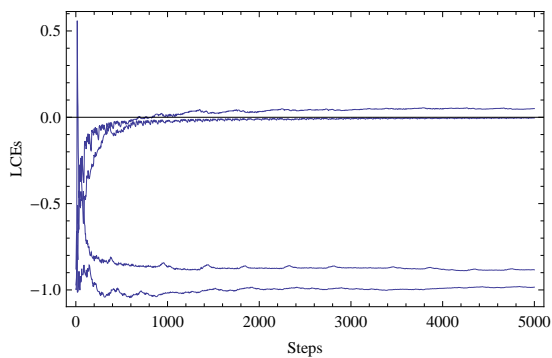


**4.9. zīm.** 4D trajektoriju 2D projekcija apakštelpā  $(x_1(t), x_2(t))$ ,  $w_{14} = -0.7$ .

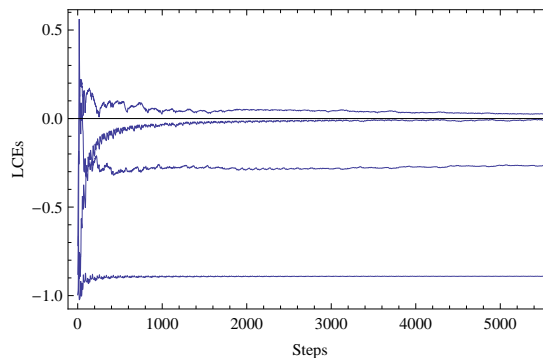


**4.10. zīm.** 4D trajektoriju 3D projekcija apakštelpā  $(x_1(t), x_2(t), x_4(t))$ ,  $w_{14} = -0.7$ .

Kā arī ir apskatīta Ļapunova eksponentu dinamika 4.11. zīm. un 4.12. zīm.



**4.11. zīm.** Sistēmas (4.20) ar regulējošo matricu (4.23) Ļapunova eksponentu dinamika,  $k_1 = 0.5$  and  $k_2 = 1.815$ ,  $w_{14} = -1$ .



**4.12. zīm.** Sistēmas (4.20) ar regulējošo matricu (4.23) Ļapunova eksponentu dinamika,  $k_1 = 0.5$  and  $k_2 = 1.815$ ,  $w_{14} = -0.7$ .

## 2. piemērs. Aplūkosim

$$W = \begin{pmatrix} 0.8 & 2 & -0.8 & 0.5 \\ -2 & 0.3 & 0.4 & -0.7 \\ -0.5 & 0.2 & 1.8 & 2 \\ 0.8 & -0.7 & -2 & 1.8 \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

un parametri ir  $v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = 1$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 10$  un  $\theta_i$ , kur  $i = 1, 2, 3, 4$

aprēķināti sekojoši

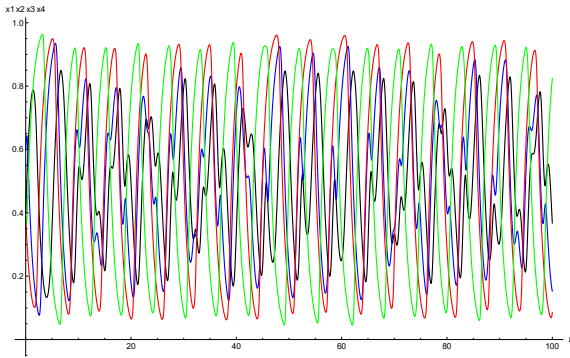
$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_1 = \frac{w_{11} + w_{12} + w_{13} + w_{14}}{2}, \\ \theta_2 = \frac{w_{21} + w_{22} + w_{23} + w_{24}}{2}, \\ \theta_3 = \frac{w_{31} + w_{32} + w_{33} + w_{34}}{2}, \\ \theta_4 = \frac{w_{41} + w_{42} + w_{43} + w_{44}}{2}. \end{array} \right.$$

$$\theta_1 = 1.25, \theta_2 = -1, \theta_3 = 1.75, \theta_4 = -0.05.$$

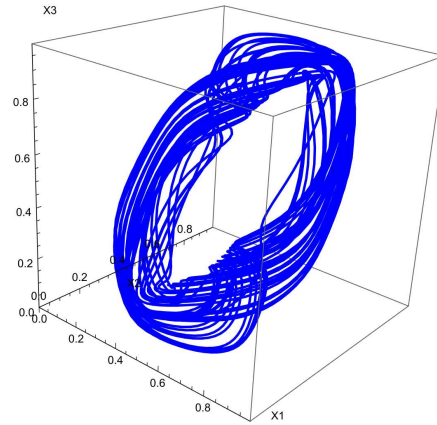
Sākumnosacījumi ir

$$x_1(0) = 0.4; x_2(0) = 0.6; x_3(0) = 0.39; x_4(0) = 0.38. \tag{4.25}$$

Kritiskais punkts ir  $(0.5; 0.5; 0.5; 0.5)$ . Standarta linearizācijas analīze sniedz īpašvērtības  $\lambda_{1,2} = -0.44 \pm 4.603i$  un  $\lambda_{3,4} = 4.33 \pm 5.135i$ . Kritiskā punkta veids ir nestabils fokuss-fokuss.

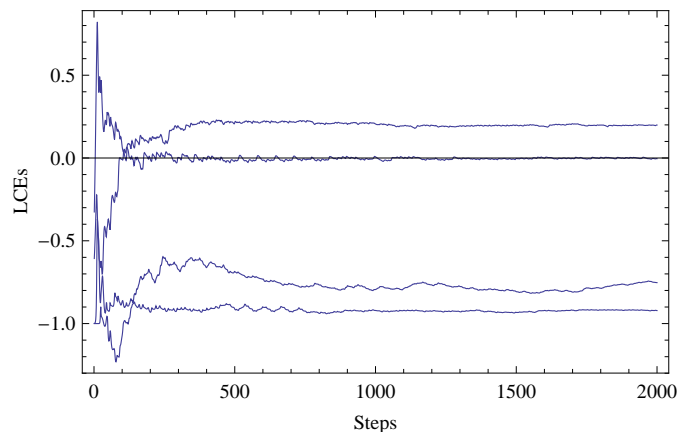


**4.13. zīm.** Sistēmas (4.20) ar regulējošo matricu (4.24) atrisinājumu  $(x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t))$ , grafiki.



**4.14. zīm.** 4D trajektoriju 3D projekcija apakštelpā  $(x_1, x_2, x_3)$ .

Ļapunova eksponentu dinamiku var redzēt 4.15. zīm.



4.15. zīm.  $LE_1 = 0.20, LE_2 = 0, LE_3 = -0.75, LE_4 = -0.92$

$LE_1, LE_2, LE_3, LE_4 = (+, 0, -, -)$  ir haotiskais atraktors. Sistēmas (4.20) atrisinājumu uzvedība ar regulējošo matricu (4.24) un sākumnosacījumiem (4.25) ir haotiskā.

## 5 Piecu-dimensiju (5D) sistēmas

PDV sistēma, kas sastāv no pieciem vienādojumiem, ir

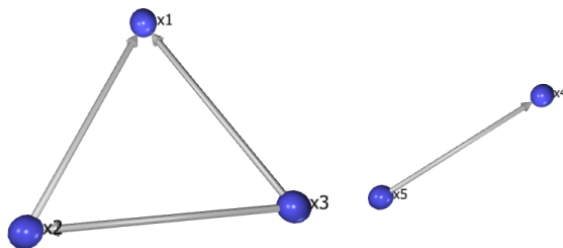
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = f_1(w_{11}x_1 + \dots + w_{15}x_5) - v_1x_1, \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(w_{21}x_1 + \dots + w_{25}x_5) - v_2x_2, \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dx_5}{dt} = f_5(w_{51}x_1 + \dots + w_{55}x_5) - v_5x_5. \end{array} \right. \quad (5.26)$$

### 5.1 Piemēri

1. piemērs Aplūkosim piecu-dimensiju sistēmu (5.26) un regulējošo matricu

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.27)$$

un  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5 = 5, v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = v_5 = 1, \theta_1 = 1.5, \theta_2 = \theta_3 = 1$  un  $\theta_4 = \theta_5 = 0.5$ . Šī sistēma sastāv no vienas trīs-dimensiju sistēmas un vienas divu-dimensiju sistēmas. Šī sistēma ir nesaistīta, un tai ir viens kritiskais punkts  $(0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5)$ . Sistēmas atrisinājums ir stabils.

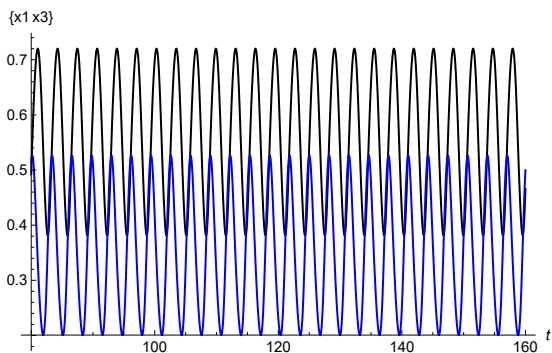


5.1. zīm. Grafs, kas atbilst regulējošās matricas gadījumam (5.27).

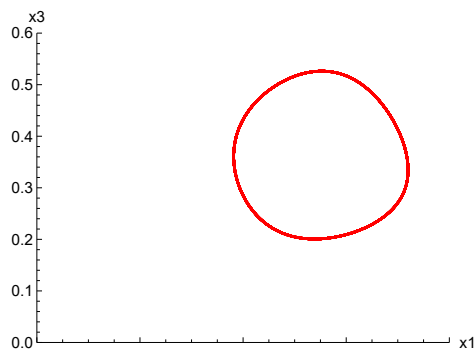
2. piemērs Aplūkosim piecu-dimensiju sistēmu (5.26) un regulējošo matricu

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0.5 \end{pmatrix} \quad (5.28)$$

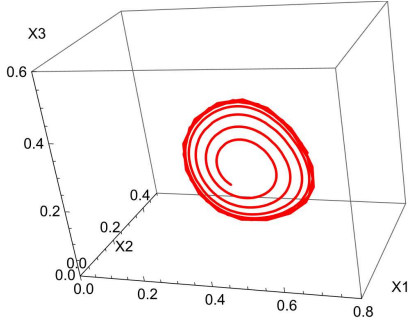
un  $\mu_1 = \mu_3 = 0.5$ ,  $\mu_2 = 15$ ,  $\mu_4 = \mu_5 = 10$ ,  $v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = v_5 = 1$ ,  $\theta_1 = 1.2$ ,  $\theta_2 = 0.5$ ,  $\theta_3 = -0.6$ ,  $\theta_4 = 1.2$ ,  $\theta_5 = -0.7$ . Šī sistēma sastāv no vienas trīs-dimensiju sistēmas, kurai ir periodiskais atrisinājums (skat. 3.2. zīm.), un vienas divu-dimensiju sistēmas, kurai ir periodiskais atrisinājums (skat. 2.1. zīm.). Šī sistēma ir nesaistīta, un tai ir trīs kritiskie punkti. Sistēmas (5.26) ar regulējošo matricu (5.28) atrisinājums ir periodisks.



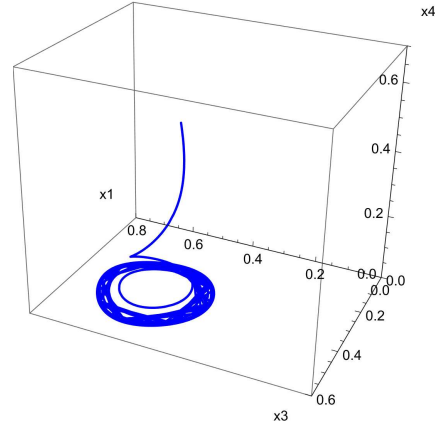
5.2. zīm. Sistēmas (5.26) ar regulējošo matricu (5.28) atrisinājumu  $x_i(t)$ ,  $i = 1, 3$ , grafiki.



5.3. zīm. 5D trajektoriju 2D projekcija apakštelpā  $(x_1, x_3)$ .



5.4. zīm. 5D trajektoriju 3D projekcija apakšstelpā  $(x_1, x_2, x_3)$ .



5.5. zīm. 5D trajektoriju 3D projekcija apakšstelpā  $(x_1, x_3, x_4)$ .

## 6 Sešu-dimensiju (6D) sistēmas

PDV sistēma, kas sastāv no sešiem vienādojumiem, ir

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = f_1(w_{11}x_1 + \dots + w_{16}x_6) - v_1x_1, \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(w_{21}x_1 + \dots + w_{26}x_6) - v_2x_2, \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dx_6}{dt} = f_6(w_{61}x_1 + \dots + w_{66}x_6) - v_6x_6. \end{array} \right. \quad (6.29)$$

Līdzīgas divu, trīs, četru un patvaļīgu dimensiju sistēmas [58],[63] parādās dažādos kontekstos, kas apraksta neironu tīklus [14],[13], ģenētiskos tīklus [89], telekomunikāciju tīklus [29] un citus. Šāda veida modeļi var atspoguļot tīkla evolūciju laikā  $t$ . Iespējama tīklu vadība un kontrole, mainot sistēmas parametrus [4], [70].

### 6.1 Piemēri

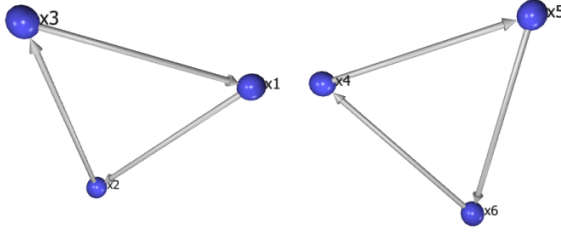
Mūsu uzdevums izveidot sešu-dimensiju atraktoru no trīs-dimensiju atraktora.

1. piemērs Aplūkosim sešu-dimensiju sistēmu (6.29) un regulējošo matricu

$$W = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & k_2 \end{pmatrix}, \quad (6.30)$$



kur  $k_1 = k_2 = 1$ ,  $\mu_i = 5$ ,  $\theta_i = \frac{k-1}{2}$ .

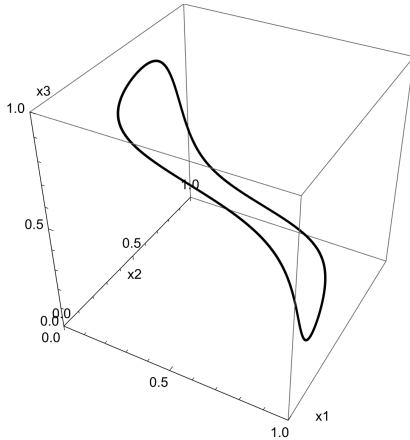


**6.1. zīm.** Grafs, kas atbilst regulējošās matricas gadījumam (6.30).

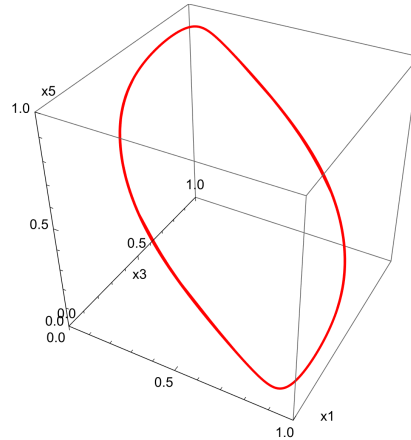
Sākumnosacījumi ir

$$x_1(0) = 0.046; x_2(0) = 0.8; x_3(0) = 0.3; x_4(0) = 0.7; x_5(0) = 0.8; x_6(0) = 0.2.$$

6D sistēmai ir atraktors periodiskā atrisinājuma veidā, kas ir konstruēts no trīs-dimensiju periodiskā atrisinājuma. Periodiskā atraktora projekcijas 3D apakštelpās (skat. 6.2. zīm. un 6.3. zīm.).



**6.2. zīm.** 6D trajektoriju 3D projekcija apakštelpā  $(x_1, x_2, x_3)$



**6.3. zīm.** 6D trajektoriju 3D projekcija apakštelpā  $(x_1, x_3, x_5)$

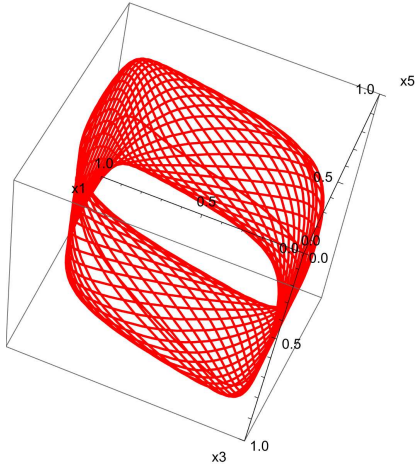
Apskatīsim sistēmu (6.29) ar regulējošo matricu (6.30), kur  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 0.5$ ,  $\mu_i = 5$ ,  $\theta_i = \frac{k-1}{2}$ .

Sākumnosacījumi ir

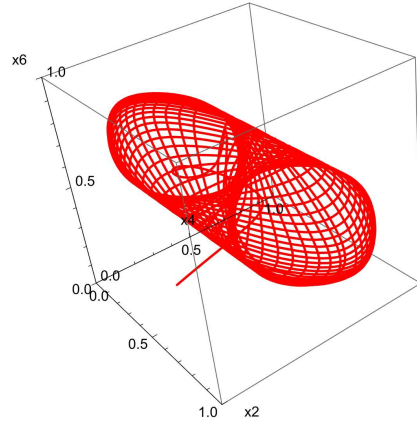
$$x_1(0) = 0; x_2(0) = 0.4; x_3(0) = 0.1; x_4(0) = 0.2; x_5(0) = 0.1; x_6(0) = 0.1.$$

Periodiskā atraktora projekcijas 3D apakštelpās (skat. 6.4. zīm. un 6.5. zīm.).

Dotā sistēma ir apskatīta rakstā [68].



**6.4. zīm.** 6D trajektoriju 3D projekcija apakštelpā  $(x_1, x_3, x_5)$



**6.5. zīm.** 6D trajektoriju 3D projekcija apakštelpā  $(x_2, x_4, x_6)$

**2. piemērs** Aplūkosim trīs-dimensiju sistēmu (3.9) ar regulējošo matricu (3.18), parametru kopu (3.17) un sākumnosacījumiem (3.19) (skat. 3.4. zīm.). Trīs atrisinājumu neregulāro uzvedību var apskatīt 3.5. zīm.

Aplūkosim sešu-dimensiju sistēmu un regulējošo matricu

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5.64 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.02 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5.64 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0.1 \\ 0.5 & 0 & 0 & 1 & 0.02 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.31)$$

un

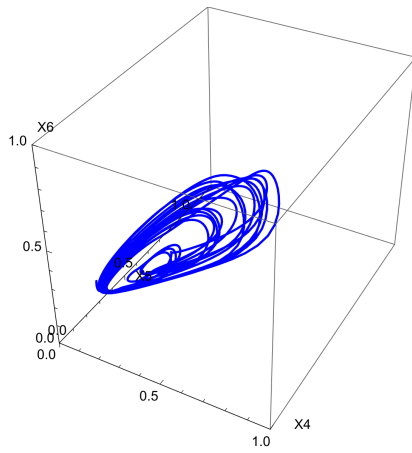
$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_4 = \mu_5 = 7, \mu_3 = \mu_6 = 13, v_1 = v_4 = 0.65, v_2 = v_5 = 0.42, v_3 = v_6 = 0.1,$$

$$\theta_1 = \theta_4 = 0.5, \theta_3 = \theta_5 = 0.3, \theta_2 = \theta_6 = 0.7.$$

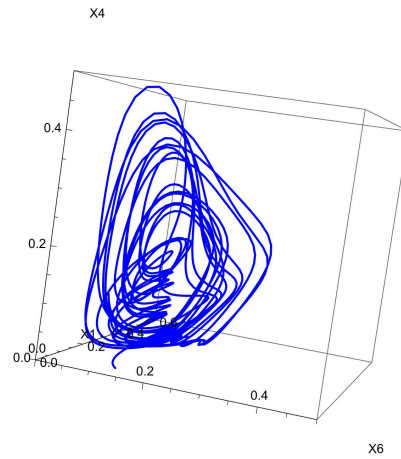
Sākumnosacījumi ir

$$x_1(1) = 0.68; x_2(1) = 0.45; x_3(1) = 0.15; x_4(1) = 0.68; x_5(1) = 0.45; x_6(1) = 0.15.$$

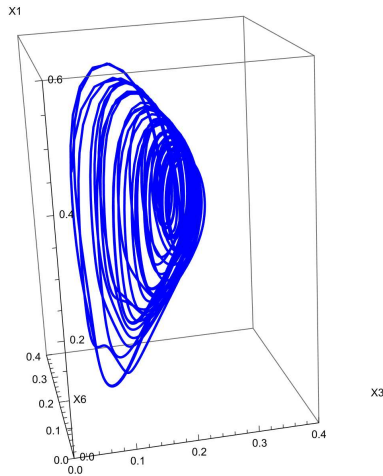
Sistēma ir nesaistīta, ja elements  $w_{61}$  ir nulle. Pieņemsim, ka  $w_{61}$  ir vienāds ar 0.5. Tādā gadījumā sešu-dimensiju sistēma ir saistīta. Tad eksistē sešu-dimensiju atrakstors un 3D projekcijas var apskatīt 6.6. zīm. un 6.7. zīm.



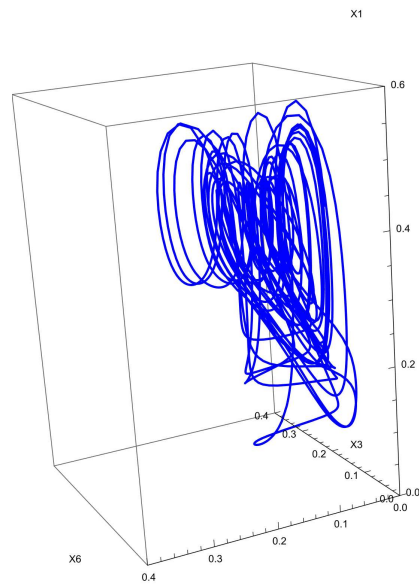
**6.6. zīm.** 6D trajektoriju 3D projekcija apakštelpā  $(x_4, x_5, x_6)$



**6.7. zīm.** 6D trajektoriju 3D projekcija apakštelpā  $(x_1, x_4, x_6)$

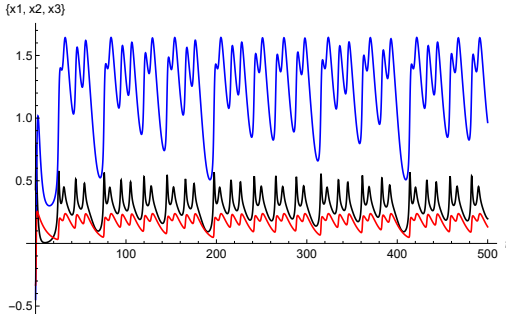


**6.8. zīm.** 6D trajektoriju 3D projekcija apakštelpā  $(x_1, x_3, x_6)$

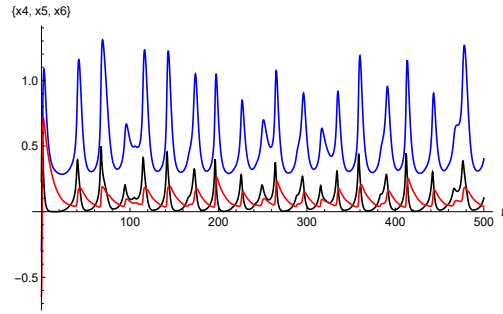


**6.9. zīm.** 6D trajektoriju 3D projekcija apakštelpā  $(x_1, x_3, x_6)$

Sistēmas (6.29) atrisinājums ar regulējošo matricu (6.31) ir attēlots 6.10. zīm un 6.11. zīm. Atrisinājumiem ir neregulārā forma. Atrisinājumi ir dažādi zīmējumos 6.10. un 6.11., jo elements  $w_{61}$  nav vienāds ar nulli.



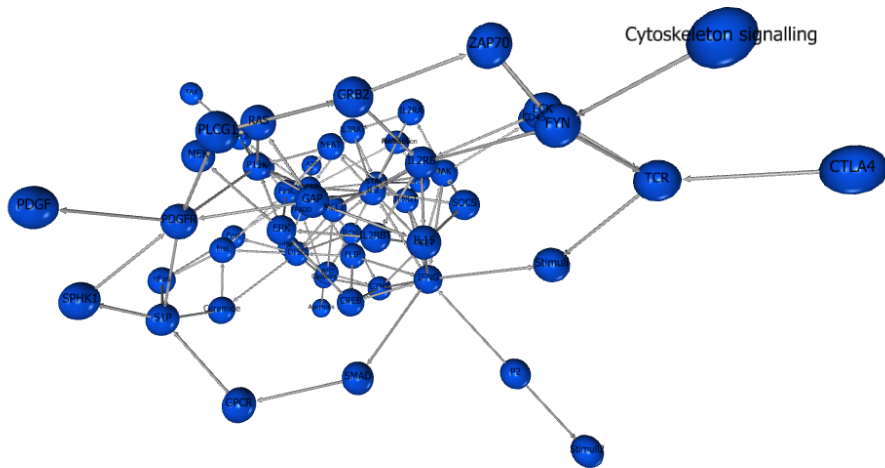
**6.10. zīm.** Sistēmas (6.29) ar regulējošo matricu (6.31) atrisinājumu  $x_i(t)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , grafiki,  $w_{61} = 0.5$ .



**6.11. zīm.** Sistēmas (6.29) ar regulējošo matricu (6.31) atrisinājumu  $x_i(t)$ ,  $i = 4, 5, 6$ , grafiki,  $w_{61} = 0.5$ .

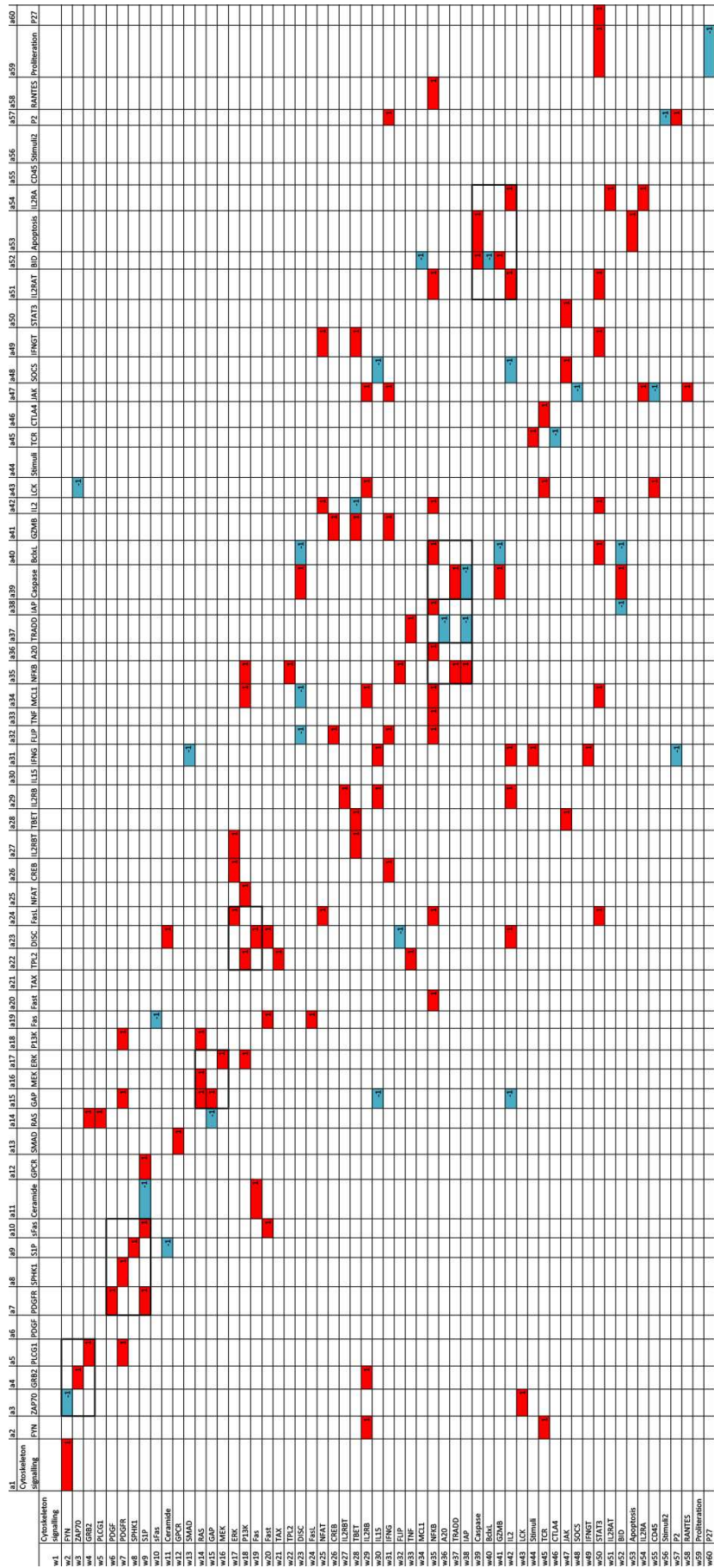
## 7 Sešdesmit-dimensiju (60D) sistēmas

Pētījumam izmantotais tīkls ir reālistisks bioloģiskais tīkls, “T šūnas lielu granulu limfocītu leukēmijas gadījumā, kas asociējas ar asins vēzi”. Rakstā [89] ir apskatīts modelis, kas satur 60 mezglus un 195 regulējoši savienojumi. Tika konstatēts, ka šim tīklam ir trīs atraktori, divi no tiem atbilst vēža stāvoklim (apzīmēti ar  $C_1$  un  $C_2$ ) un trešais atraktors asociējas ar normālu stāvokli (apzīmēts ar  $N$ ). Četrdesmit astoņi savienojumi no slima stāvokļa uz normālu stāvokli ir atklāti. Pareiza attiecīgo četrdesmit astoņu parametru atlase var novirzīt sistēmu normālā stāvoklī. Bija novērota parametru pertrubācijas eksistence. Tika apskatīts atraktoru tīkls, un galvenais priekšlikums bija sakārtot eksperimentālu parametru pielāgošanu, lai sasniegtu nepieciešamu mērķi.



**7.1. zīm.** Matricas  $60 \times 60$  grafs.

Lai iegūtu šo grafu, tika izmantota programma “Graphia”. Matrica 7.2. ir uzrakstīta programmā “Microsoft Excel”.



7.2. zīm. 60D regulējošā matrica.

## 7.1 Apkašsistēmas

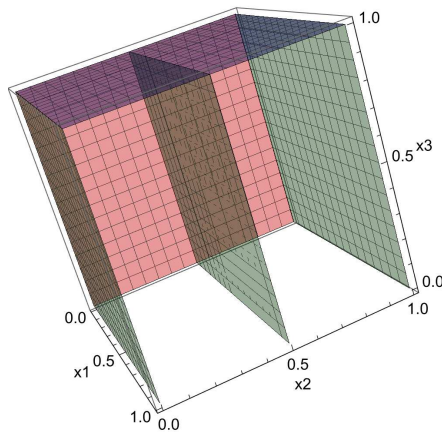
Dotajā sistēmā ir vairākas trīs-dimensiju un četru-dimensiju apakšsistēmas.

### 7.1.1 Trīs-dimensiju sistēmas

**1. piemērs** Aplūkosim  $\mu_1 = 5$ ,  $\mu_2 = 15$ ,  $\mu_3 = 5$ ,  $v_1 = v_2 = v_3 = 1$  un  $\theta_1 = 1.2$ ,  $\theta_2 = 0.5$ ,  $\theta_3 = -0.6$ . Sistēmas (3.9) regulējošā matrica ir

$$W = \begin{pmatrix} w_2a_3 & w_2a_4 & w_2a_5 \\ w_3a_3 & w_3a_4 & w_3a_5 \\ w_4a_3 & w_4a_4 & w_4a_5 \end{pmatrix}, \quad (7.32)$$

kur  $w_2a_3 = -1$ ,  $w_2a_4 = w_2a_5 = 0$ ,  $w_3a_3 = w_3a_5 = 0$ ,  $w_3a_4 = 1$ ,  $w_4a_3 = w_4a_4 = 0$ ,  $w_4a_5 = 1$ . Sistēmai (3.9) ar regulējošo matricu (7.32) eksistē trīs kritiskie punkti.



**7.3. zīm.** Sistēmas (3.9) ar regulējošo matricu (7.32) izoklīnu  $x_1$  - sarkana,  $x_2$  - zaļa,  $x_3$  - zila, vizualizācija.

Kritiskā punkta (0.0024; 0.0006; 0.9997) raksturīgais vienādojums ir

$$-\lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + C = 0, \quad (7.33)$$

kur  $A = -3.00215$ ,  $B = -3.00419$  un  $C = -1.00204$ .

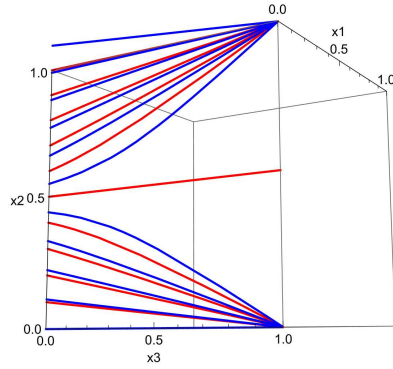
Atrisinot vienādojumu, iegūstam  $\lambda_1 = -1.01218$ ,  $\lambda_2 = -0.998321$  un  $\lambda_3 = -0.991643$ . Kritiskā punkta veids ir stabils mezgls.

Kritiskā punkta (0.0024; 0.5; 0.9997) raksturīgais vienādojums ir (7.33), kur  $A = 0.739495$ ,  $B = 4.5184$  un  $C = 2.77883$ .

Atrisinot vienādojumu, iegūstam  $\lambda_1 = -1.01218$ ,  $\lambda_2 = -0.998321$  un  $\lambda_3 = 2.75$ . Kritiskā punkta veids ir segls.

Kritiskā punkta (0.0024; 0.9994; 0.9997) raksturīgais vienādojums ir (7.33), kur  $A = -3.00215$ ,  $B = -3.00419$  un  $C = -1.00204$ .

Atrisinot vienādojumu, iegūstam  $\lambda_1 = -1.01218$ ,  $\lambda_2 = -0.998321$  un  $\lambda_3 = -0.991643$ . Kritiskā punkta veids ir stabils mezgls.



**7.4. zīm.** Sistēmas (3.9) ar regulējošo matricu (7.32) divu stabilu mezglu un segla vizualizācija.

### 7.1.2 Četru-dimensiju sistēmas

1. piemērs Regulējošā matrica ir

$$W = \begin{pmatrix} w_6a_7 & w_6a_8 & w_6a_9 & w_6a_{10} \\ w_7a_7 & w_7a_8 & w_7a_9 & w_7a_{10} \\ w_8a_7 & w_8a_8 & w_8a_9 & w_8a_{10} \\ w_9a_7 & w_9a_8 & w_9a_9 & w_9a_{10} \end{pmatrix},$$

kur  $w_6a_7 = w_7a_8 = w_8a_9 = w_9a_7 = w_9a_{10} = 1$ ,  $w_6a_8 = w_6a_9 = w_6a_{10} = w_7a_7 = w_7a_9 = w_7a_{10} = w_8a_7 = w_8a_8 = w_8a_{10} = w_9a_8 = w_9a_9 = 0$  un parametri  $v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = 1$ ,  $\mu_1 = 5$ ,  $\mu_2 = 15$ ,  $\mu_3 = 5$ ,  $\mu_4 = 5$ ,  $\theta_1 = 1.2$ ,  $\theta_2 = 0.5$ ,  $\theta_3 = -0.6$ ,  $\theta_4 = -0.2$ .

Kritiskais punkts ir  $(0.0025; 0.00056; 0.9997; 0.9975)$ . Standarta linearizācijas analīze sniedz īpašvērtības  $\lambda_1 = -0.998321$ ,  $\lambda_2 = -0.991643$ ,  $\lambda_3 = -0.987669$  un  $\lambda_4 = -0.987513$ . Kritiskā punkta veids ir 4D stabils mezgls.

Kritiskais punkts ir  $(0.00250369; 0.5; 0.999664; 0.997528)$ . Standarta linearizācijas analīze sniedz īpašvērtības  $\lambda_1 = -0.998321$ ,  $\lambda_2 = -0.987669$ ,  $\lambda_3 = -0.987513$  un  $\lambda_4 = 2.75$ . Kritiskā punkta veids ir segls.

Kritiskais punkts ir  $(0.00250369; 0.999443; 0.999664; 0.997528)$ . Kritiskā punkta  $\lambda_1 = -0.998321$ ,  $\lambda_2 = -0.991643$ ,  $\lambda_3 = -0.987669$  un  $\lambda_4 = -0.987513$ . Kritiskā punkta veids ir stabils mezgls.

## 8 Secinājumi

Promocijas darba galvenie rezultāti ir:

- Tiek aplūkotas otrās un trešās kārtas sistēmas ar dažādu struktūru regulējošajām matricām. Aplūkoti kritiskie punkti, to veidi un skaits.
- Trīs-dimensiju sistēmām un četru-dimensiju sistēmām haotiskie atraktori ir aplūkoti. Tika konstruēti piemēri. Promocijas darbā, lai aprēķinātu Ļapunova eksponentus

tika izmantota “Ice.m for Mathematica” pakotne. Tika izmantota arī cita Wolfram Mathematica programma “Lynch-DSAM.nb”, lai pārbaudītu iegūtos rezultātus.

- Tika apskatītas četru-dimensiju sistēmu kritisko punktu īpašvērtību formulas. Piemēri tika konstruēti 4D sistēmām ar stabiliem kritiskajiem punktiem.
- Tika aplūkoti neironu tīkli un līdzība attiecīgajos PDV tipa modeļos apskatīta.
- Tika konstruēti 5D sistēmu piemēri. Šīm sistēmām eksistē periodiskie atraktori. Tika veikta 5D atraktoru vizualizācija, projicējot tos zemas dimensijas apakštelpās.
- Tika konstruēti 6D sistēmu piemēri. Šīm sistēmām ir periodiskie atraktori un sistēmām ir neregulārā atrisinājumu uzvedība. Tika veikta 6D atraktoru vizualizācija, projicējot tos zemas dimensijas apakštelpās.
- Sešdesmit-dimensiju sistēmas ir aplūkotas.  $60 \times 60$  matricas grafs ir iegūts, izmantojot programmu Graphia. 60D sistēmas dažas apakšsistēmas ir aplūkotas.

Gēnu regulējošo tīklu izpēte ir ļoti svarīga cilvēka dzīvei un darbībai. Gan dažādu slimību ārstēšanai, piemēram kā leukēmija, multiplā skleroze, Alcheimera slimība, gan problēmas un to risinājumu aprakstam ekonomikā, psiholoģijā, politikā un daudzās citās jomās. Jo vairāk ir vienādojumu sistēmā, jo vairāk tā ir līdzīga gēnu tīklam, kas rādās dzīvē. Galvenais mērķis ir turpināt pētījumu un atrast metodes, lai varētu pētīt sistēmas ar lielu vienādojumu skaitu.



## Literatūra

- [1] K. T. Alligood, T. D. Sauer, J. A. Yorke. Chaos: An Introduction to Dynamical Systems. Springer-Verlag New York Inc, 1997.
- [2] A. Amon. Nonlinear dynamics. Master. Phenomenes nonlineaires et chaos, France. 2007. <https://hal.archives-ouvertes.fr/cel-01510146v1>
- [3] V. S. Anishchenko. Deterministic chaos. Soros Educational Journal, Vol.6, 1997, 70-76.
- [4] S. Atslega, F. Sadyrbaev, I. Samuilik. On Modelling Of Complex Networks. Engineering for Rural Development(ISSN 1691-5976), pp. 1009-1014, 2021.
- [5] S. Atslega, F. Sadyrbaev. On modelling of artificial networks arising in applications, Engineering for Rural Development, 19, pp. 1659-1665, 2020.
- [6] J. Awrejcewicz, A. Krysko, N. Erofeev, V. Dobriyan, V. Barulina, V. Krysko. Quantifying Chaos by Various Computational Methods. Part 1: Simple Systems. Entropy (Basel, Switzerland), 2018, 20(3), 175. doi:/10.3390/e20030175
- [7] R. Bakker, J. C. Schouten, C. Lee Giles, F. Takens, Cor M. van den Bleek. Learning Chaotic Attractors by Neural Networks. Neural Comput 2000, 12(10), 2355-2383. doi:/10.1162/089976600300014971
- [8] E. Brokan, F. Sadyrbaev. On attractors in gene regulatory systems, AIP Conference Proceedings 1809, 020010 (2017): Proc. of the 6th International Advances In Applied Physics And Materials Science Congress & Exhibition (APMAS 2016), 1-3 June 2016, Istanbul, Turkey. doi: 10.1063/1.4975425
- [9] G. Chen, J. Moiola, H. Wang. Bifurcation control: theories, methods, and applications. International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 10, No. 03, pp. 511-548 (2000). doi.org/10.1142/S0218127400000360
- [10] S. P. Cornelius, W. L. Kath, A. E. Motter. Realistic control of network dynamics. Nature Communications, Volume 4, Article number: 1942 (2013). doi: 10.1038/ncomms2939
- [11] Marius-F. Danca, M. Lampart. Hidden and self-excited attractors in a heterogeneous Cournot oligopoly model. Chaos, Solitons and Fractals, Vol. 142. doi:10.1016/j.chaos.2020.110371
- [12] P. Das, A. Kundu. Bifurcation and Chaos in Delayed Cellular Neural Network Model. Journal of Applied Mathematics and Physics, 2 (2014), 219-224. doi: 10.4236/jamp.2014.25027.
- [13] A. Das, A. B. Roy, Pritha Das. Chaos in a Three Dimensional General Model of Neural Network. International Journal of Bifurcation and Chaos, 12(2002), 2271-2281. <http://dx.doi.org/10.1142/S0218127402005820>
- [14] A. Das, A. B. Roy, Pritha Das. Chaos in a three dimensional neural network. Applied Mathematical Modelling, 24(2000), 511-522.

- [15] S. Effah-Poku, W. Obeng-Denteh, I. K. Dontwi. A Study of Chaos in Dynamical Systems. *Hindawi Journal of Mathematics*, Volume 2018, Article ID 1808953. <https://doi.org/10.1155/2018/1808953>
- [16] F. Emmert-Streib, M. Dehmer, B. Haibe-Kains. Gene regulatory networks and their applications: understanding biological and medical problems in terms of networks. *Front Cell Dev Biol.* 2014;2:38. Published 2014 Aug 19. doi:10.3389/fcell.2014.00038
- [17] G. Espinosa-Paredes. Nonlinear BWR dynamics with a fractional reduced order model. *Fractional-Order Models for Nuclear Reactor Analysis*. Woodhead Publishing Series in Energy, pp. 247-295, 2021. doi:10.1016/B978-0-12-823665-9.00007-9
- [18] F. Gafarov, A. Galimyanov. *Artificial Neural Networks and their applications*, Kazan, 2018.
- [19] H. Gritli, N. Khraief, S. Belghith. Further Investigation of the Period-Three Route to Chaos in the Passive Compass-Gait Biped Model. In A. Azar, S. Vaidyanathan (Ed.), *Handbook of Research on Advanced Intelligent Control Engineering and Automation* (pp. 279-300), 2015. IGI Global. doi:/10.4018/978-1-4666-7248-2.ch010
- [20] J. M. Gutierrez, A. Iglesia. Mathematica package for analysis and control of chaos in nonlinear systems. *Computers in Physics* 12, 608 (1998). doi: 10.1063/1.168743
- [21] V. Hadziabdić, M. Mehuljić, J. Bektešević, A. Mašić. Dynamics and Stability of Hopf Bifurcation for One Non-linear System. *TEM Journal*. Volume 10 (2), pp. 820-824, 2021. doi:10.18421/TEM102-40, May 2021.
- [22] S. Haykin. Neural networks expand SP's horizons, *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 13, no. 2, pp. 24-49, March 1996, doi: 10.1109/79.487040.
- [23] A. Hastings, C. L. Hom, S. Ellner, P. Turchin, H. Charles J. Godfray. Chaos in Ecology: Is Mother Nature a Strange Attractor? *Annual Review of Ecology and Systematics*, vol.24 (1), 1-33, 1993. doi:10.1146/annurev.es.24.110193.000245
- [24] M. Hirsch, S. Smale, R. Devaney. *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*. Elsevier, 2004. <https://doi.org/10.1016/C2009-0-61160-0>
- [25] T. Jonas. Sigmoid functions in reliability based management. *Periodica Polytechnica Social and Management Sciences*. 15, 2, 67-72. <https://doi.org/10.3311/pp.so.2007-2.04>.
- [26] H. D. Jong. Modeling and Simulation of Genetic Regulatory Systems: A Literature Review, *J. Comput Biol.* 2002; 9(1):67-103. doi: 10.1089/10665270252833208
- [27] G. Karlebach, R. Shamir. Modelling and analysis of gene regulatory networks. *Nat Rev Mol Cell Biol* 9, 770-780 (2008). <https://doi.org/10.1038/nrm2503>
- [28] A.J.M. Khalaf, T. Kapitaniak, K. Rajagopal, A. Alsaedi. 'A new three-dimensional chaotic flow with one stable equilibrium: dynamical properties and complexity analysis' *Open Physics*, vol. 16, no. 1, 2018, pp. 260-265. <https://doi.org/10.1515/phys-2018-0037>

- [29] Y. Koizumi et al. Adaptive Virtual Network Topology Control Based on Attractor Selection. *Journal of Lightwave Technology* (ISSN: 0733-8724), Vol.28 (06/2010), Issue 11, pp.1720-1731. doi:10.1109/JLT.2010.2048412
- [30] S. Koshy-Chenthittayil. *Chaos to Permanence-Through Control Theory*. Clemson University. Phd thesis, 2015.
- [31] A. Krogh. What are artificial neural networks?. *Nat Biotechnol.* 2008 Feb;26(2):195-7. doi: 10.1038/nbt1386
- [32] A. Kundu, P. Das. Global Stability, Bifurcation, and Chaos Control in a Delayed Neural Network Model. *Advances in Artificial Neural Systems*. Volume 2014. Article ID 369230. <https://doi.org/10.1155/2014/369230>
- [33] N.V. Kuznetsov. Hidden attractors in fundamental problems and engineering models: A short survey. In Vo Hoang Duy, Tran Trong Dao, Ivan Zelinka, Hyeung-Sik Choi, and Mohammed Chadli, editors, *AETA 2015: Recent Advances in Electrical Engineering and Related Sciences*, pages 13-25, Cham, 2016. Springer International Publishing.
- [34] Q. V. Lawande, N. Maiti. *Role of nonlinear dynamics and chaos in applied sciences*, Government of India, Atomic Energy Commission, Feb 2000, 111 p. RN:31049284
- [35] G. Leonov, N. Kuznetsov. Hidden Attractors in Dynamical Systems: from Hidden Oscillations in Hilbert-Kolmogorov, Aizerman, and Kalman Problems to Hidden Chaotic Attractor in Chua Circuits. *International Journal of Bifurcation and Chaos* Vol. 23, No. 01, 1330002 (2013). <https://doi.org/10.1142/S0218127413300024>
- [36] Yi Li, J. S. Muldowney. On Bendixsons criterion, *J. Differential Equations* 106 (1993), no. 1, 27-39. MR 1249175. doi:<https://doi.org/10.1006/jdeq.1993.1097>
- [37] A. Listratov. <https://sites.google.com/site/aspirantlistratov>
- [38] M. Liu, B. Sang, N. Wang, I. Ahmad. Chaotic Dynamics by Some Quadratic Jerk Systems. *Axioms* 2021, 10, 227. <https://doi.org/10.3390/axioms10030227>
- [39] S. Lynch. *Dynamical Systems with Applications Using Mathematica*, Springer, 2017.
- [40] E. E. Mahmoud, K. M. Abualnaja, O. A. Althagafi. High dimensional, four positive Lyapunov exponents and attractors with four scroll during a new hyperchaotic complex nonlinear model. *AIP Advances* 8, 065018 (2018). doi:/10.1063/1.5030120
- [41] S. Mukherjee, S. K. Palit, D. K. Bhattacharya. Is one dimensional Poincare map sufficient to describe the chaotic dynamics of a three dimensional system?. *Applied Mathematics and Computation*, Volume 219, Issue 23, 2013, Pages 11056-11064, ISSN 0096-3003. doi:/10.1016/j.amc.2013.04.043.
- [42] J. D. Murray. *Mathematical Biology: I: An Introduction*. Third Edition. *Interdisciplinary Applied Mathematics*, Volume 17, 2002. New York: Springer.

- [43] A. Nagy-Staron, K. Tomasek, C. Caruso Carter, et al. Local genetic context shapes the function of a gene regulatory network. *eLife*, 10, 2021, e65993. <https://doi.org/10.7554/eLife.65993>
- [44] K. Nantomah. On Some Properties of the Sigmoid Function. *Asia Matematika*, Asia Matematika, 2019. hal-02635089.
- [45] F. Nazarimehr, K. Rajagopal, J. Kengne, S. Jafari, V. Pham. A new four-dimensional system containing chaotic or hyper-chaotic attractors with no equilibrium, a line of equilibria and unstable equilibria. *Chaos, Solitons Fractals*, Elsevier, vol. 111(C), pages 108-118. doi: 10.1016/j.chaos.2018.04.009
- [46] S. Nikolov, N. Nedkova. Gyrostat Model Regular And Chaotic Behavior. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2015. doi:10.1515/jtam-2015-0021
- [47] K. Nosrati, Ch. Volos. Bifurcation Analysis and Chaotic Behaviors of Fractional-Order Singular Biological Systems. *Nonlinear Dynamical Systems with Self-Excited and Hidden Attractors*, Springer, 2018. Pages 3-44.
- [48] D. Ogorelova, F. Sadyrbaev, I. Samuilik, V. Sengileyev. Sigmoidal functions in network theories. *Proceedings of IMCS of University of Latvia*, 17(1), 2017. ISSN 1691-8134
- [49] E. Ott. *Chaos in Dynamical Systems* (2nd ed.). Cambridge: Cambridge University Press, 2002. doi:10.1017/CBO9780511803260
- [50] W. Ott, J. A. Yorke. When Lyapunov exponents fail to exist. *Phys. Rev. E* 78, 056203, 2008.
- [51] I. Pehlivan. Four-scroll stellate new chaotic system, *Optoelectronics and Advanced Materials - Rapid Communications*, 5, 9, September 2011, pp.1003-1006 (2011).
- [52] L. Perko. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer-Verlag New York, 2001. Edition Number 3. doi.org/10.1007/978-1-4613-0003-8
- [53] A. Polynikis, S. J. Hogan, M. Di Bernardo. Comparing different ODE modelling approaches for gene regulatory networks. *Journal of Theoretical Biology*, Elsevier, 2009, 261 (4), pp.511. .10.1016/j.jtbi.2009.07.040. hal-00554639.
- [54] A. Rahman, Basil H. Jasim, Yasir I. A. Al-Yasir, Raed A. Abd-Alhameed, Bilal NajiAlhasnawi. A New No Equilibrium Fractional Order Chaotic System, *Dynamical Investigation, Synchronization, and Its Digital Implementation*. *Inventions* 2021, 6, 49.
- [55] A. C. Reinol, M. Messias. Periodic Orbits, Invariant Tori and Chaotic Behavior in Certain Nonequilibrium Quadratic Three-Dimensional Differential Systems. *Nonlinear Dynamical Systems with Self-Excited and Hidden Attractors*, Springer, 2018, Pages 299-326.
- [56] D. H. Rothman. *Nonlinear Dynamics I: Chaos*, Fall 2005.

- [57] F. Sadyrbaev, I. Samuilik, V. Sengileyev. Biooscillators in models of genetic networks. Submitted for publication in Springer paper collection, 2022.
- [58] F. Sadyrbaev, I. Samuilik. On the hierarchy of attractors in dynamical models of complex networks. 19 International Conference Numerical Analysis and Applied Mathematics, Rhodes, Greece, 20-26 September 2021, To appear in AIP Conference Proceedings. <https://aip.scitation.org/journal/apc>
- [59] F. Sadyrbaev, I. Samuilik, V. Sengileyev. On Modelling of Genetic Regulatory Networks. WSEAS Transactions on Electronics, 2021, Vol. 12, No. 1, 73.-80.lpp. ISSN 1109-9445. e-ISSN 2415-1513. doi:10.37394/232017.2021.12.10
- [60] F. Sadyrbaev, I. Samuilik. Mathematical Modelling of Evolution of Multidimensional Networks. In: 2. International Congress on Mathematics and Geometry: Proceedings Book, Turkey, Ankara, 20-20 May, 2021. Ankara: Iksad Global Publishing, 2021, pp.171-176. ISBN 978-605-74407-9-2.
- [61] F. Sadyrbaev, I. Samuilik. Mathematical Modelling of Genetic Regulatory Networks. In: 2nd International Baku Conference on Scientific Research: The Book of Full Texts. Vol.1, Azerbaijan, Baku, 28-30 April, 2021. Baku: Iksad Global Publications, 2021, pp.463-469. ISBN 978-605-70554-6-0.
- [62] F. Sadyrbaev, S. Atslega, I. Samuilik. On Controllability in Models of Biological Networks. VIII International Conference on Science and Technology: Collection of Works. Russia, Belgorod, 24-25 September, 2020, pp.411-413. ISBN 978-5-9571-2993-6.
- [63] F. Sadyrbaev, I. Samuilik. Remark on four dimensional system arising in applications. Proceedings of IMCS of University of Latvia, 20(1), 2020. ISSN 1691-8134
- [64] F. Sadyrbaev, D. Ogorelova, I. Samuilik. A nullclines approach to the study of 2D artificial network. Contemporary mathematics, 2019.
- [65] I. Samuilik, F. Sadyrbaev. On a dynamical model of genetic networks. WSEAS Transactions on Business and Economics, vol. 20, pp. 104-112, 2023. doi:10.37394/23207.2023.20.11
- [66] I. Samuilik. Genetic engineering-construction of a network of four dimensions with a chaotic attractor. Vibroengineering Procedia, vol. 44, pp. 66-70, 2022. doi.org/10.21595/vp.2022.22829
- [67] I. Samuilik, F. Sadyrbaev, S. Atslega. Mathematical modelling of nonlinear dynamic systems. Engineering for Rural Development(ISSN 1691-5976), pp. 172-178, 2022. doi: 10.22616/ERDev.2022.21.TF051
- [68] I. Samuilik, F. Sadyrbaev, V. Sengileyev. Examples of Periodic Biological Oscillators: Transition to a Six-dimensional System. WSEAS Transactions on Computer Research, vol. 10, pp. 49-54, 2022. doi:10.37394/232018.2022.10.7

- [69] I. Samuilik, F. Sadyrbaev, D. Ogorelova. Mathematical Modeling of Three - Dimensional Genetic Regulatory Networks Using Logistic and Gompertz Functions. WSEAS Transactions on Systems and Control, vol. 17, pp. 101-107, 2022. doi: 10.37394/23203.2022.17.12
- [70] I. Samuilik, F. Sadyrbaev. Modelling Three Dimensional Gene Regulatory Networks. WSEAS Transactions on Systems and Control, 2021, Vol. 16, No. 67, pp.755-763. ISSN 1991-8763. e-ISSN 2224-2856. doi:10.37394/23203.2021.16.67
- [71] I. Samuilik, F. Sadyrbaev. Mathematical Modeling of Complex Networks. Proceedings of the 38th International Business Information Management Association (IBIMA), 23-24 November 2021, Seville, Spain. ISBN: 978-0-9998551-7-1, ISSN: 2767-9640
- [72] I. Samuilik, F. Sadyrbaev. Mathematical Modelling of Leukemia Treatment. WSEAS Transactions on Computers, 2021, Vol. 20, 274.-281.lpp. ISSN 1109-2750. e-ISSN 2224-2872. doi:10.37394/23205.2021.20.30
- [73] I. Samuilik, D. Ogorelova. Mathematical modelling of GRN using different sigmoidal functions. In: 1st International symposium on recent advances in fundamental and applies sciences (ISFAS-2021), Turkey, Erzurum, 10-12 September, 2021. Erzurum: Ataturk University Publishing House, 2021, pp.491-498. ISBN 978-625-7086-40-0.
- [74] I. Samuilik, F. Sadyrbaev. On four-dimensional systems modelling Genetic Regulatory Networks. Proceedings of IMCS of University of Latvia, 21(1), 2021. ISSN 1691-8134
- [75] I. Samuilik. On critical points of some GRN-type systems. Proceedings of IMCS of University of Latvia, 20(1), 2020. ISSN 1691-8134
- [76] I. Samuilik. Remark on a system arising in GRN theory. Proceedings of IMCS of University of Latvia, 19(1), 2019. ISSN 1691-8134
- [77] I. Samuilik, F. Sadyrbaev. On a two-dimensional system of differential equations related to the theory of gene regulatory networks. Proceedings of IMCS of University of Latvia, 18(1), 2018. ISSN 1691-8134
- [78] M. Sandri. Numerical Calculation of Lyapunov Exponents. The Mathematica Journal, Volume 6(3), 1996.
- [79] W. S. Sayed, A. G. Radwan, H. A. H. Fahmy. Chaos and Bifurcation in Controllable Jerk-Based Self-Excited Attractors. Nonlinear Dynamical Systems with Self-Excited and Hidden Attractors, Springer, 2018. Pages 45-70
- [80] Ya. G. Sinai. How mathematicians study chaos. Mathematical education, 2001, issue 5, 32-46 (Russian). <http://www.mathnet.ru>
- [81] J. C. Sprott. Elegant Chaos Algebraically Simple Chaotic Flows. World Scientific Publishing Company, 2010, 302 pages. <https://doi.org/10.1142/7183>
- [82] J. C. Sprott. Chaotic dynamics on large networks. Chaos. 2008, Jun;18(2):023135. doi: 10.1063/1.2945229

- [83] K. Suzuki. Artificial Neural Networks. Methodological advances and biomedical applications. InTech Janeza Trdine 9, 51000 Rijeka, Croatia, 2011.
- [84] M. T. Swain, J. J. Mandel, W. Dubitzky. Comparative study of three commonly used continuous deterministic methods for modeling gene regulation networks. *BMC Bioinformatics* 11, 459 (2010). <https://doi.org/10.1186/1471-2105-11-459>
- [85] A. T. Terekhin, E. V. Budilova, L. M. Kachalova, M. P. Karpenko. Neural network modeling of brain cognitive functions: review of basic ideas. 2009. N 2(4). <http://psystudy.ru>
- [86] S. Vaidyanathan, V. Pham, Ch. Volos, A. Sambas. A Novel 4-D Hyperchaotic Rikitake Dynamo System with Hidden Attractor, its Properties, Synchronization and Circuit Design. *Nonlinear Dynamical Systems with Self-Excited and Hidden Attractors*, Springer, 2018. Pages 345-364
- [87] N. Vijesh, S. K. Chakrabarti, J. Sreekumar. Modeling of gene regulatory networks: A review. *J. Biomedical Science and Engineering*, 2013, 6, 223-231. <http://dx.doi.org/10.4236/jbise.2013.62A027>
- [88] J. Vohradsky. Neural network model of gene expression. *FASEB J.* 15, 846854 (2001).
- [89] Le-Zhi Wang, Ri-Qi Su, Zi-Gang Huang, Xiao Wang, Wen-Xu Wang, Celso Grebogi and Ying-Cheng Lai, A geometrical approach to control and controllability of nonlinear dynamical networks. *Nature Communications*, Volume 7, Article number: 11323 (2016). doi: 10.1038/ncomms11323
- [90] Rui Wang, Mingjin Li, Zhaoling Gao, Hui Sun, A New Memristor-Based 5D Chaotic System and Circuit Implementation. *Hindawi Complexity* Volume 2018, Article ID 6069401, 12 pages <https://doi.org/10.1155/2018/6069401>
- [91] L. F. Wessels, E. P. van Someren, M. J. Reinders. A comparison of genetic network models. *Pac Symp Biocomput.* 2001:508-19. PMID: 11262968.
- [92] H. Yaghoobi, K. Maghooli, M. Asadi-Khiavi, N.J. Dabanloo. GENAVOS: A New Tool for Modelling and Analyzing Cancer Gene Regulatory Networks Using Delayed Nonlinear Variable Order Fractional System. *Symmetry.* 2021; 13(2):295. <https://doi.org/10.3390/sym13020295>
- [93] S. Walczak, N. Cerpa. *Artificial Neural Networks, Encyclopedia of Physical Science and Technology (Third Edition)*, 2003.
- [94] C. E. Wayne, M. I. Weinstein. *Dynamics of Partial Differential Equations*. Springer, 2015.
- [95] Zhaoyang Zhang, Weiming Ye, Yu Qian, Zhigang Zheng, Xuhui Huang, Gang Hu. Chaotic Motifs in Gene Regulatory Networks. *PLoS One.* 2012; 7(7): e39355. Published online 2012 Jul 6. doi: 10.1371/journal.pone.0039355
- [96] <https://mathworld.wolfram.com>
- [97] <http://www.scholarpedia.org/article/Equilibrium>

- [98] <http://odessa-memory.info>
- [99] [www.msandri.it/soft.html](http://www.msandri.it/soft.html)
- [100] Software: Microsoft Excel
- [101] Software: Wolfram Mathematica
- [102] Software: Graphia

Inna Samuilika. Matemātiskais modelis tīklu klasei lietojumos. Promocijas darba kop-savilkums. Daugavpils: Daugavpils Universitātes Akadēmiskais apgāds "Saule", 2023. 48 lpp.

.....

Izdevējdarbības reģistr. apliecība Nr. 2-0197.

Iespiests DU Akadēmiskajā apgādā "Saule" -

Vienības iela 13, Daugavpils, LV-5401, Latvija