DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
MATEMĀTIKAS KATEDRA

Marija DOBKEVIČA

PROMOCIJAS DARBA

DIVPUNKTU ROBEŽPROBLĒMU ATRISINĀJUMU TUVINĀJUMI

KOPSAVILKUMS

matemātikas doktora grāda iegūšanai apakšnozarē
"Diferenciālvienādojumi"

Daugavpils, 2014

Kopsavilkums ir iesniegts matemātikas doktora grāda iegūšanai apakšnozarē “Diferenciālvienādojumi”

Matemātikas katedra

Daugavpils Universitāte

Zinātniskais vadītājs:
Dr. habil. math., Prof. Felikss Sadirbajevs, Daugavpils Universitāte, Latvijas Universitātes Matemātikas un Informātikas Institūts.

Promocijas darbu daļēji atbalstīja ESF projekti
Nr. 2009/0140/1DP/1.1.2.1.2/09/IPIA/VIAA/015 un
Nr. 2013/0024/1DP/1.1.1.2.0/13/APIA/VIAA/045.

VISPĀRĪGA INFORMĀCIJA PAR DARBU

PĒTĪJUMA OBJEKTS: otrās kārtas parasto diferenciālvienādojumu nelineārās robežproblēmas.

PĒTĪJUMA MĒRĶI:

- izpētīt nelineāro otrās kārtas diferenciālo vienādojumu atrisinājumu raksturīgās īpašības;
- noskaidrot saistību starp variāciju vienādojumu atrisinājumu uzvedību un robežproblēmas atrisinājumu tipiem;
- noskaidrot saistību starp robežproblēmas atrisinājumu tipiem un aproksimācijas virknes elementu tipiem;
- papildināt *H. Knobloch–L. Jackson–K. Schrader–L. Erbe* teorijas rezultātus par robežproblēmas atrisinājumu īpašībām;
- ar datorprogrammu "Wolfram Mathematica" palīdzību skaitliski konstruēt konkrētu nelineāro robežproblēmu atrisinājumus un konverģējošās uz tiem virknes, kā arī salīdzināt tos ar teorētiskiem rezultātiem.

PĒTĪJUMA METODES: pētījumā tiek izmantota nelineārās analīzes metožu daudzveidība, piemēram,

- matemātiskās analīzes klasiskās metodes;
- augšējo un apakšējo funkciju metode;
- monotono iterāciju metode;
- nemonotono iterāciju metode;
- piešaudes metode.

GALVENIE REZULTĀTI

Promocijas darba rezultāti tika publicēti 8 rakstos ([75]-[82]), no kuriem 3 tika publicēti SCI saraksta žurnālos, un 1 – SCOPUS saraksta žurnālā.

Promocijas darba rezultāti tika aprobēti dažādu līmeņu konferencēs:

- Daugavpils Universitātes konferencēs:
  - DU 51. starptautiskajā konferencē ar referātu "Nemonotono tuvinājumu konstruēšana robežproblēmas atrisināšanai" (Daugavpilī, 2009. gada 15.-18. aprīlī);
  - DU 52. starptautiskajā konferencē ar referātu "Par diferenciālvienādojumu atrisinājumu tuvinājumiem" (Daugavpilī, 2010. gada 14.-16. aprīlī);
  - DU 53. starptautiskajā konferencē ar referātu "Nelineāro robežproblēmu atrisinājumi. Skaitlisko eksperimentu rezultāti" (Daugavpilī, 2011. gada 13. - 15. aprīlī);
  - DU 54. starptautiskajā konferencē ar referātu "Dažas parasto diferenciālvienādojumu atrisinājumu īpašības" (Daugavpilī, 2012. gada 18. - 20. aprīlī);
  - DU 55. starptautiskajā konferencē ar referātu "Par divpunktu robežproblēmu atrisinājumu tuvinājumiem" (Daugavpilī, 2013. gada 10. - 12. aprīlī);
- Latvijas Universitātes ikgadējās zinātniskajās konferencēs:
  - LU 67. konferencē ar referātu "Par robežproblēmu atrisinājumu nemonotoniem tuvinājumiem" (Rīgā, 2009. gada 20. februārī);
  - LU 68. konferencē ar referātu "Par robežproblēmu atrisinājumu nemonotonām iterācijām" (Rīgā, 2010. gada 19. februārī);
  - LU 69. konferencē ar referātu "Par atrisinājumu tipiem un aproksimāciju shēmām divpunktu otrās kārtas nelineārām robežproblēmām" (Rīgā, 2011. gada 18. februārī);
  - LU 70. konferencē ar referātu "Par atrisinājumu tipiem un nemonotonām aproksimāciju shēmām" (Rīgā, 2012. gada 24. februārī);
  - LU 71. konferencē ar referātu "Par nelineāro diferenciālvienādojumu atrisinājumu tuvinājumiem"(Rīgā, 2013. gada 22. februārī);

- Latvijas Matemātikas biedrības konferencēs:
  - LMB 8. konferencē ar referātu "Par nemonotonām iterāciju shēmām" (Valmierā, 2010. gada 9. - 10. aprīlī);
  - LMB 9. konferencē ar referātu "Par robežproblēmu atrisinājumu tuvinājumiem" (Jelgavā, 2012. gada 30.-31. martā);
- starptautiskajās "Mathematical Modelling and Analysis" konferencēs:
  - MMA 14. starptautiskajā konferencē ar referātu "On construction of converging sequences to solutions of boundary value problems" (Daugavpilī, 2009. gada 27. - 30. maijā);
  - MMA 16. starptautiskajā konferencē ar referātu "Non-monotone convergence schemes" (Siguldā, 2011. gada 25. - 28. maijā);
  - MMA 17. starptautiskajā konferencē ar referātu "Iterations to solutions of "concave - convex" BVP" (Tallinā, Igaunijā, 2012. gada 6. - 9. jūnijā);
  - MMA 18. starptautiskajā konferencē un 4. starptautiskajā konferencē "Approximation Methods and Orthogonal Expansions" ar referātu "Types and Multiplicity of solutions to Sturm-Liouville BVP" (Tartū, Igaunijā, 2013. gada 27. - 30. maijā).
- citās starptautiskajās konferencēs:
  - Starptautiskajā konferencē "AIMS 8th Conference on DSDEA" ar referātu "Non-monotone approximation schemes for solutions of boundary value problems for ODE" (Drēzdenē, Vācijā, 2010. gada 25. - 28. maijā);
  - 16. starptautiskajā konferencē "ICDEA 2010" ar referātu "The structure of a set of solutions of two-point BVP between lower and upper functions" (Rīgā, 2010. gada 19.-23. jūlijā);

- Starptautiskajā konferencē “EQUADIFF 2011” ar referātu “On types of solutions of nonlinear BVPs and approximation schemes” (Loughborough, Lielbritānijā, 2011. gada 1. - 5. augustā);
- Starptautiskajā konferencē “7th European Conference on Elliptic and Parabolic Problems” ar referātu “On non-monotone approximation schemes for solutions of the second order differential equations” (Gaetā, Itālijā, 2012. gada 20. - 25. maijā);
- Starptautiskajā konferencē “5th International Workshop - 2012 “Constructive methods”’ ar referātu “Non-monotone approximations of solutions of quasi-linear BVP” (Tokajā, Ungārijā, 2012. gada 28. jūnijā - 1. jūlijā).

Promocijas darba zinātniskais vadītājs F. Sadirbajevs ir referējis par kopīgajiem pētījumu rezultātiem starptautiskajās konferencēs:

- “The Fourth International Workshop-2009 Constructive methods for non-linear boundary value problems”, (Egerā, Ungārijā, 2009. gada 1. - 4. jūlijā);
- Starptautiskajā konferencē “ICNAAM 2009”, (Krētā, Grieķijā, 2009. gada 18. - 22. septembrī).

Promocijas darba autore ir referējusi par kopīgajiem pētījumu rezultātiem zinātniskajās konferencēs:

- LU 72. konferencē ar referātu “On solutions of intermediate type for the Dirichlet problem”(Rīgā, 2014. gada 28. februārī);
- LMB 10. konferencē ar referātu “On different type solutions of the Dirichlet BVP” (Liepajā, 2014. gada 11. - 12. aprīlī);
- MMA 19. starptautiskajā konferencē “Mathematical Modelling and Analysis” ar referātu “On different type solutions of the boundary value problems” (Druskininkai, Lietuvā, 2014. gada 26. - 29. maijā).

Uzstāšanās tēzes tika publicētas konferenču tēžu grāmatās [58] -[74].

1. Ievads

Jau daudzus gadsimtus diferenciālvienādojumi tiek izmantoti, lai aprakstītu un analizētu daudzu zinātnes disciplīnu problēmas. To nozīmīgums motivē matemātiķu paaudzes, kā arī citus zinātniekus, izstrādāt metodes, pētot diferenciālvienādojumu atrisinājumu īpašības, sākot no senākajām metodēm precīzo atrisinājumu atrašanā ar elementāro funkciju palīdzību līdz mūsdienu analītiskajām un skaitliskās aproksimācijas metodēm.

Promocijas darbā tiek pētīti nelineārie otrās kārtas parastie diferenciālvienādojumi, kurus var uzrakstīt šādā veidā

$$x'' = f(t, x, x'), \text{ kur } f, f'_x, f'_{x'} \in C([a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R}), \tag{1.1}$$

ar vairākiem robežnosacījumiem:

- Dirihlē
$$x(a) = A, \quad x(b) = B; \tag{1.2}$$
- Neimana
$$x'(a) = A, \quad x'(b) = B; \tag{1.3}$$
- jauktā tipa
$$x'(a) = A, \quad x(b) = B \text{ vai} \tag{1.4}$$

$$x(a) = A, \quad x'(b) = B. \tag{1.5}$$

Robežproblēmu atrisinājumu eksistences nosacījumus var formulēt augšējo un apakšējo funkciju terminos.

1.1. definīcija.[5, Def. 7.18, 317. lpp.] *Funkcijas $\alpha(t)$ un $\beta(t)$ tiek sauktas par vienādojuma (1.1) apakšējo un augšējo funkciju attiecīgi, ja*

$\forall t \in [a,b]$ *ir spēkā nevienādības*

$$\begin{aligned} &\alpha(t) \le \beta(t), \\ &\alpha''(t) \ge f(t, \alpha(t), \alpha'(t)), \\ &\beta''(t) \le f(t, \beta(t), \beta'(t)). \end{aligned} \tag{1.6}$$

Viens no diferenciālvienādojumu teorijas galveniem uzdevumiem ir izpētīt diferenciālvienādojumu atrisinājumu īpašības, ieskaitot eksistenci, unitāti un atrisinājumu skaitu. Augšējo un apakšējo funkciju metodei ir svarīga loma robežproblēmu teorijas attīstībā. Augšējo un apakšējo funkciju metodes teorijas pirmie soļi (1890. gadā, *E. Picard*) tika veikti kvazilineārajiem diferenciālvienādojumiem, kur atrisinājumu eksistenci garantē monotonā iteratīvā tehnika. 1931. gadā *G. Scorza Dragoni* ieviesa apakšējo un augšējo funkciju metodes jēdzienu parastajiem diferenciālvienādojumiem ar Dirihlē robežnosacījumiem. *C.de Coster* un *P. Habets* darbos [3], [34], [35] var atrast vēsturiskas un bibliogrāfiskas atsauces kopā ar jaunākajiem rezultātiem apakšējo un augšējo funkciju metodes pielietošanai.

Nozīmīgs solis pieder *M. Nagumo*, kurš 1937. gadā ieviesa ([48]) tā saukto Nagumo nosacījumu:

$$\forall t \in [a,b],\ \alpha(t) \le x \le \beta(t),\ \forall x' \in \mathbb{R},\ |f(t,x,x')| \le \varphi(|x'|),$$

$$\int_{\lambda}^{N} \frac{s\,ds}{\varphi(s)} > \max_{[a,b]} \beta(t) - \min_{[a,b]} \alpha(t), \text{ kur } \lambda = \tfrac{2M}{b-a}, \quad M := \max_{[a,b]}\{|\beta(t)|, |\alpha(t)|\}.$$

Neierobežotai funkcijai f šāds rezultāts [5, Th. 7.34, 327. lpp.] ir spēkā.

1.1. teorēma. *Pieņemsim, ka* $f\colon [a,b] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *ir nepārtraukta un* $\alpha(t)$, $\beta(t)$ *ir vienādojuma (1.1) apakšējā un augšējā funkcija attiecīgi. Pieņemsim, ka funkcija* f *apmierina Nagumo nosacījumus intervālā* $[a,b]$. *Ja* A, B *ir konstantes, kas apmierina* $\alpha(a) \le A \le \beta(a)$ *un* $\alpha(b) \le B \le \beta(b)$, *tad problēmai (1.1), (1.2) eksistē atrisinājums* $x(t)$ *un* $\forall t \in [a,b]$ *ir spēkā* $\alpha(t) \le x(t) \le \beta(t)$.

Līdzīgi rezultāti var tikt formulēti Neimana robežnosacījumiem (1.3) un jauktā tipa robežnosacījumiem (1.4).

Ja izpildās nevienādības (1.6) un papildus izpildās sekojošas nevienādības katrai no robežproblēmām:

$$\begin{array}{lll} \alpha(a) \leq A \leq \beta(a), & \alpha(b) \leq B \leq \beta(b) & \text{(Dirihlē problēmai);} \\ \beta'(a) \leq A \leq \alpha'(a), & \beta'(b) \geq B \geq \alpha'(b) & \text{(Neimana problēmai);} \\ \alpha'(a) \geq A \geq \beta'(a), & \alpha(b) \leq B \leq \beta(b) & \text{(jauktā tipa),} \end{array}$$

tad $\alpha(t)$ un $\beta(t)$ sauc par *apakšējo* un *augšējo* funkciju atbilstošajai robežproblēmai.

Darba galvenā motivācija izriet no sekojošiem *H. Knobloch* pētījumiem. Rakstā [44] tika pierādīts, ka vienādojumam (1.1) piemērotos apstākļos [1] eksistē atrisinājums ξ tāds, ka izpildās:

(i) ja $n \to \infty$, tad $\xi_n \to \xi$ un $\xi_n' \to \xi'$, vienmērīgi visiem $t \in I$;

(ii) starpībai $\triangle_n = \xi - \xi_n \neq 0$ ir viena zīme visiem n un visiem $t \in I$;

(iii) $\mid \triangle_n' \mid \leq c \mid \triangle_n \mid$ visiem n un visiem $t \in I$, kur konstante c ir neatkarīga no n un t.

Ja izpildās nosacījumi *(i)-(iii)*, tad ξ ir atrisinājums ar īpašību (B).

Pēc vācu matemātiķa *H. Knobloch*, ASV matemātiķi *L. Jackson* un *K. Schrader* [41], aplūkojot to pašu problēmu, pierādīja rezultātus par atrisinājuma eksistenci ar raksturīgo īpašību (B')[2]:

(i′) $x_n \to x$ un $x_n' \to x'$ vienmērīgi intervālā $[a, b]$;

(ii′) $\triangle_n = x - x_n \neq 0$ ir viena zīme visiem $n \geq 1$ un $a < t \leq b$;

(iii′) katrai vērtībai $0 < \delta < \frac{1}{2}(b-a)$ eksistē konstante c, kas ir atkarīga no δ, bet nav atkarīga no n un t, tāda, ka $\mid \triangle_n'(t) \mid \leq c \mid \triangle_n(t) \mid$ visiem $n \geq 1$ un $a + \delta \leq t \leq b - \delta$.

[1] Gadījumā, kad eksistē vienādojuma (1.1) atrisinājumu virkne $\{\xi_n\}$.

[2] Gadījumā, kad eksistē vienādojuma (1.1) atrisinājumu virkne $\{x_n\}$.

Galvenajos rezultātos [41] teikts, ka Dirihlē robežproblēmai (1.1), (1.2) eksistē atrisinājumi ar īpašību (B'), ja f apmierina Lipšica nosacījumu[3] atteicībā pret x un x', un eksistē pareizi sakārtotas ($\alpha \leq \beta$) apakšējās un augšējās funkcijas un f atbilst Nagumo nosacījumam apgabalā $\omega = \{(t,x)\colon\ a \leq t \leq b,\ \alpha(t) \leq x \leq \beta(t)\}$. Ja funkcijai $f(t,x,x')$ ir nepārtraukti pirmās kārtas parciālie atvasinājumi f_x un $f_{x'}$ un $\xi(t)$ ir Dirihlē robežproblēmas (1.1), (1.2) atrisinājums, kuram piemīt īpašība (B'), tad lineārais vienādojums

$$y'' = f_{x'}(t,\xi(t),\xi'(t))y' + f_x(t,\xi(t),\xi'(t))y \tag{1.7}$$

ir neoscilējošs (*"disconjugate"* [4]) vaļējā intervālā (a,b).

Darbā [36] *L. Erbe* ir apskatījis otrās kārtas diferenciālvienādojumu (1.1) ar dažādiem robežnosacījumiem $x'(a) = g(x(a))$, $x(b) = d$; $x(a) = c$, $x'(b) = h(x(b))$; $x'(a) = g(x(a))$, $x'(b) = h(x(b))$. Visos gadījumos eksistē īpašs problēmas atrisinājums $x_0(t)$ tāds, ka $\alpha(t) \leq x_0(t) \leq \beta(t)$, kuram atbilstošais variāciju vienādojums neoscilē vaļējā intervālā (a,b).

Lemma. ([36, 462. lpp.], *Pieņemsim, ka $f_{x'}$ un f_x ir nepārtrauktas un $\xi(t)$ ir vienādojuma (1.1) atrisinājums intervālā $[a,b]$. Tad, lai atrisinājumam $\xi(t)$ piemītu īpašība (B), ir nepieciešami un pietiekami, ka variāciju vienādojums (1.7) būtu neoscilējošs intervālā $[a,b]$.*

Variāciju vienādojuma (1.7) atrisinājumu uzvedības pētīšanai nepieciešams precizēt dažus jautājumus. Vispirms, ar kādiem sākuma nosacījumiem ir jāapskata variāciju vienādojumi Dirihlē un Neimana robežproblēmu atrisinājumiem, vai šie nosacījumi ir vienādi?

Vienkārši piemēri parāda, ka konkrētām problēmām eksistē atrisinājumi, kurus nevar tuvināt ar monotonām virknēm, un līdz ar to attiecīgie variāci-

[3] [1, 1. lpp.] Teiksim, ka funkcija f apgabalā G apmierina Lipšica nosacījumu, ja eksistē tādas konstantes $K \geq 0$ un $L \geq 0$, ka $\forall (t,y,y')$, $(t,z,z') \in G$ ir spēkā $|f(t,y,y') - f(t,z,z')| \leq K|y-z| + L|y'-z'|$.

[4] [4, 351. lpp.] Teiksim ka vienādojums ir neoscilējošs (*"disconjugate"*) intervālā J, ja katram šī vienādojuma netriviālajam atrisinājumam ir ne vairāk kā viena nulle intervālā J.

ju vienādojumi ir oscilējoši intervālā (a, b). Viens no promocijas darba uzdevumiem ir sakārtot un klasificēt robežproblēmu atrisinājumus un izpētīt attiecīgās aproksimējošās virknes un attiecīgā variāciju vienādojuma atrisinājumu uzvedību.

2. Robežproblēmu atrisinājumu tipu definīcijas

Sākumā atzīmēsim, ka atrisinājumu tipu definīcijas ir atkarīgas no tā, kādus robežnosacījumus aplūko. Tāpēc dažadām robežproblēmām, kuras tiek pētītas šī darba ietvaros, tiek piedāvātas atsevišķas definīcijas. Vairākos gadījumos robežproblēmas atrisinājumu tipu klasifikācija tiek ieviesta ar variāciju vienādojuma palīdzību.

Pētījumu gaitā kļuva skaidrs, ka robežproblēmu 0-tipa atrisinājumu jādefinē atsevišķi no i-tipa ($i \neq 0$) atrisinājumiem.

2.1. definīcija. Pieņemsim, ka $\xi(t)$ ir Dihihlē robežproblēmas (1.1), (1.2) atrisinājums. Teiksim, ka $\xi(t)$ ir 0-tipa atrisinājums, ja variāciju vienādojums (1.7) attiecībā pret $\xi(t)$, ir tāds, ka tā atrisinājums $y(t)$ ar sākuma nosacījumiem

$$y(a) = 0, \quad y'(a) = 1 \tag{2.1}$$

neoscilē intervālā (a, b) (t.i., nav nuļļu intervalā (a, b)) un $y(b) \neq 0$.

2.2. definīcija. Pieņemsim, ka $\xi(t)$ ir jauktā tipa robežproblēmas (1.1), (1.4) atrisinājums. Teiksim, ka $\xi(t)$ ir 0-tipa atrisinājums, ja variāciju vienādojums (1.7) attiecībā pret $\xi(t)$, ir tāds, ka tā atrisinājums $y(t)$ ar sākuma nosacījumiem[5]

$$y(a) = 1, \quad y'(a) = 0 \tag{2.2}$$

neoscilē intervālā (a, b) un $y(b) \neq 0$.

2.1. piezīme. Līdzīgi 0-tipa atrisinājumu var definēt arī Neimana robežproblēmai (1.1), (1.3), kurai šķiet dabiski skaitīt nevis variācijas vienādo-

[5] Gadījumā, ja robežnosacījumi būtu (1.5), sākuma nosacījumi ir jāņem (2.1).

juma atrisinājuma nuļļu skaitu ($y(t) = 0$), bet tā atvasinājuma nuļļu skaitu ($y'(t) = 0$). Tomēr rakstā [82] ir dota atbilde, kāpēc tāda pieeja nederēs. Uzskatamības dēļ Neimana problēmai atrisinājumu tipi tiek definēti ar leņķiskās funkcijas palīdzību, kas akcentē šīs problēmas nianses un atvieglo arī atrisinājumu tipu klasifikāciju.

Aplūkosim vienādojuma (1.7) atrisinājuma $y(t)$ leņķisko funkciju $\Theta(t)$, definējamu ar vienādībām $y(t) = \rho(t)\sin\Theta(t)$, $y'(t) = \rho(t)\cos\Theta(t)$. Tad sākumnosacījumam (2.2) atbilst $\Theta(a) = \frac{\pi}{2}$.

2.3. definīcija. Pieņemsim, ka $\xi(t)$ ir Neimana robežproblēmas (1.1), (1.3) atrisinājums. Teiksim, ka $\xi(t)$ ir 0-tipa atrisinājums, ja Košī problēmas (1.7), (2.2) atrisinājuma $y(t)$ leņķiskā funkcija apmierina nevienādības

$$0 < \Theta(b) < \frac{3}{2}\pi. \tag{2.3}$$

Aplūkosim arī Dirihlē robežproblēmai i-tipa ($i \neq 0$) atrisinājuma definīciju variāciju vienādojuma terminos.

2.4. definīcija. Pieņemsim, ka $\xi(t)$ ir Dirihlē robežproblēmas (1.1), (1.2) atrisinājums. Teiksim, ka $\xi(t)$ ir i-tipa atrisinājums ($i = 1, 2, \dots$), ja variāciju vienādojums (1.7) attiecībā pret $\xi(t)$ ir tāds, ka tā atrisinājumam $y(t)$ ar sākuma nosacījumiem (2.1) ir tieši i nulles intervālā (a, b) un $y(b) \neq 0$. Apzīmēsim to: $type(\xi) = i$ vai $type(\xi) = (i, i+1)$, ja $y(b) = 0$.

Jauktā tipa robežproblēmas i-tipa atrisinājuma definīcija ir līdzīga, atšķiras tikai ar sākumnosacījumiem, ar kādiem aplūko variāciju vienādojumu.

Neimana robežproblēmas i-tipa atrisinājumu (kur $i = 1, 2, \dots$) definēsim ar leņķiskās funkcijas $\Theta(t)$ palīdzību.

2.5. definīcija. Pieņemsim, ka $\xi(t)$ ir Neimana robežproblēmas (1.1), (1.3) atrisinājums. Teiksim, ka $\xi(t)$ ir i- tipa ($i \neq 0$) atrisinājums, ja Košī problēmas (1.7), (2.2) atrisinājuma $y(t)$ leņķiskā funkcija apmierina nevienādības

$$\frac{2i+1}{2}\pi < \Theta(b) < \frac{2i+3}{2}\pi. \tag{2.4}$$

2.2. piezīme. Tiek aplūkoti i-tipa atrisinājuma robežgadījumi, kad atbilstošajai leņķiskajai funkicijai Θ nevienādībās (2.3) vai (2.4) ir iespējama vienādība. Tad robežproblēmas (1.1), (1.3) atrisinājuma tips ir $(i-1, i)$ vai $(i, i+1)$. Šāda veida definīcija ir saskaņota ar rakstā [79, Def. 1, 592. lpp.] definēto atrisinājumu tipu.

3. Aproksimācijas teorēmas

Eksistē monotono iterāciju pieeja robežproblēmas atrisinājumu tuvināšanai, kura tika apskatīta dažādos avotos, piemēram, [3], [6], [23], [29], [32], [46], [47]. Tika parādīts, ka, ja eksistē augšējā un apakšējā funkcija, tad monotonas virknes var tikt konstruētas kā palīgrobežproblēmas atrisinājumi. Aplūkosim palīgproblēmas Dirihlē, Neimana un jauktā tipa robežproblēmām. Robežnosacījumos konstantes A un B jāmaina uz A_n un B_n, kur $A_n \to A$, $B_n \to B$, lai būtu spēkā atbilstošas nevienādības:

$$\begin{aligned}
&\alpha(a) \le A_n \le \beta(a), && \alpha(b) \le B_n \le \beta(b) && \text{(Dirihlē problēmai);}\\
&\beta'(a) \le A_n \le \alpha'(a), && \beta'(b) \ge B_n \ge \alpha'(b) && \text{(Neimana problēmai);}\\
&\alpha'(a) \ge A_n \ge \beta'(a), && \alpha(b) \le B_n \le \beta(b) && \text{(jauktā tipa problēmai).}
\end{aligned}$$

Šajā paragrafā minēsim tikai robežproblēmu i-tipa ($i \neq 0$) atrisinājumu tuvināšanas teorēmas ar nemonotono iterāciju palīdzību, kur $\{x_n\}$ ir atbilstošo palīgproblēmu atrisinājumu virkne.

3.1. teorēma. [80, Th. 3.1, 1176. lpp.] *Pieņemsim, ka visi robežproblēmas (1.1), (1.4) atrisinājumi ir turpināmi intervālā $[a, b]$. Pieņemsim, ka $\xi(t)$ ir robežproblēmas (1.1), (1.4) atrisinājums un type$(\xi) = i$ $(i \geq 1)$, tad eksistē virkne $\{x_n\}$, kura nemonotoni konverģē uz $\xi(t)$.*

3.2. teorēma. [80, Th. 3.2, 1177. lpp.] *Pieņemsim, ka robežproblēmai (1.1), (1.4) eksistē augšējā un apakšējā funkcija $\beta(t)$ un $\alpha(t)$ un funkcijai*

$f(t, x, x')$ ir spēkā Nagumo nosacījumi. Pieņemsim, ka eksistē palīgproblēmu[6] *atrisinājumu virkne $\{x_n(t)\}$, pie tam ir spēkā $\alpha(t) < x_n(t) < \beta(t)$ un $type(x_n(t)) = i$ ($i \neq 0$), tad robežproblēmas (1.1), (1.4) atrisinājumam $x(t)$, uz kuru konverğē $\{x_n(t)\}$ izpildās: vai $type(x) = i$, vai $type(x) = (i, i+1)$, vai $type(x) = (i-1, i)$.*

3.1. piezīme. Analogas teorēmas ir spēkā arī Dirihlē[7] un Neimana [8] robežproblēmām.

Dirihlē robežproblēmai (1.2),

$$x'' = f(t, x) \quad (f \in C^1([a, b] \times \mathbb{R}, \mathbb{R}) \tag{3.1}$$

tika pierādīts arī sekojošs rezultāts.

3.3. teorēma. [78, Th. 4.1, 86. lpp.] *Pieņemsim, ka problēmai (3.1),(1.2) eksistē augšējā un apakšējā funkcija $\beta(t)$, $\alpha(t)$. Ja eksistē problēmas (3.1),(1.2) atrisinājums $\xi(t)$ tāds, ka $\alpha(t) \leq \xi(t) \leq \beta(t)$ un $type(\xi) = k$, kur $k > 1$, tad problēmai (3.1),(1.2) eksistē ne mazāk kā $2k$ citi atrisinājumi.*

4. Dažādu tipu atrisinājumu tuvinājumu konstruēšana

4.1. Vispārīgais gadījums

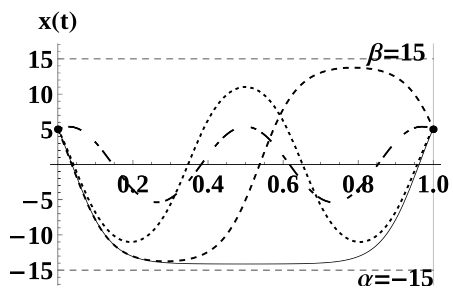
Tika parādīts, ka monotonas virknes konverğē uz 0-tipa atrisinājumiem. Rakstos [75], [79] un [80] tika pierādītas teorēmas par monotono virkņu eksistēnci Dirihlē, Neimana un jauktā tipa robežproblēmām, kad virknes konstruē kā palīgrobežproblēmas atrisinājumus. *Taisnas* virknes konstruēšana, piemēram, Dirihlē robežproblēmai [78] ir gadījumā, kad palīgrobežnosacījumus izvēlamies $x(a) = A_n$, $x(b) = B_n$, kur $A_n > A$ un $B_n > B$ vai otrādi, $A_n < A$ un $B_n < B$ ($A_n \to A$, $B_n \to B$).

[6] (1.1), $x'(a) = A_n \to A$, $x(b) = B_n \to B$.
[7] [77, Th. 2, 191. lpp.]
[8] [79, Th. 3, 592. lpp.], [79, Th. 4, 595. lpp.], [82, Th. 5.1, 17. lpp.], [82, Th. 5.2, 19. lpp.].

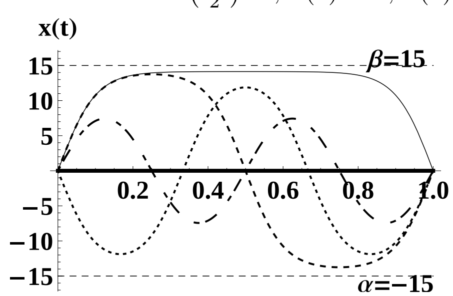
Bet eksistē arī tādi atrisinājumi, kuri nevar būt tuvināti ar monotono iterāciju palīdzību. Lai konstruētu nemonotonas virknes varam izmantot *diagonālās* virknes, no kurām, var izveidot apakšvirkni, nemonotoni konverģējošo uz pētāmas robežproblēmas atrisinājumu. Lai konstruētu diagonālās virknes, piemēram, Dirihlē robežproblēmai ([76], [78]) jāizmanto kreisā vērtība, kura ir lielāka par A ($A_n > A$) un labā vērtība, kura ir mazāka par B ($B_n < B$) vai otrādi: $A_n < A$ un $B_n > B$ ($A_n \to A$, $B_n \to B$). Neimana robežproblēmas ([79]) *"diagonālās"* virknes tika konstruētas kā problēmu (1.1) ar robežnosacijumiem

$$\begin{aligned} &x'(a) = A_i < A,\ x'(b) = B_i < B \ \text{ vai} \\ &x'(a) = A_i > A,\ x'(b) = B_i > B \end{aligned} \tag{4.1}$$

atrisinājumu virknes.



4.1. zīm. Palīgproblēmas $x'' = x^3 - \left(\frac{9\pi}{2}\right)^2 x$, $x(0) = 5$, $x(1) = 5$ daži atrisinājumi



4.2. zīm. Robežproblēmas $x'' = x^3 - \left(\frac{9\pi}{2}\right)^2 x$, $x(0) = 0$, $x(1) = 0$ daži atrisinājumi

No diagonālās virknes var izveidot apakšvirkni, kura saskaņā ar *Arzela-Ascoli* kritēriju nemonotoni konverģē uz robežproblēmas atrisinājumu.

Tomēr palīgrobežproblēmai varētu būt vairāk nekā viens atrisinājums (skat. 4.1. zīm.). Tāpēc viena palīgrobežproblēma dod dažādu virkņu elementus, kuras konverģē uz dažādiem pētāmas robežproblēmas atrisinājumiem (skat. 4.2 zīm.). Ir jāatšķir robežproblēmu atrisinājumi saskaņā ar atrisinājumu tipu definīcijām.

4.2. "Ieliekto - izliekto" robežproblēmu atrisinājumu tuvināšana

Rakstā [81] tika salīdzinātas divas pieejas monotonas virknes konstruēšanā Dirihlē robežproblēmām. Pirmo shēmu piedāvāja *L. Jackson* un *K. Schrader* [41], bet otro – *V. Lakshmikantham* un *A. Vatsala* [9], kuri aplūkoja īpaša veida "ieliektās– izliektās" funkcijas vienādojumā

$$-u'' = f(t,u) \quad (I = [a,b]).$$

(i) $f(t,u)$, $f_u(t,u)$, $f_{uu}(t,u) \in C(I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R})$;

(ii) $f(t,u) = F(t,u) + G(t,u)$, kur $F_u \leq 0$, $G_u \leq 0$, $F_{uu} \geq 0$, $G_{uu} \leq 0$ $\forall t \in [a,b]$, $u \in \mathbb{R}$;

(iii) $\exists\ \alpha_0(t)$ un $\beta_0(t)$, tādas, ka $\alpha_0(t) \leq \beta_0(t)$ intervālā I, $-\alpha_0''(t) \leq f(t,\alpha_0(t))$, $-\beta_0''(t) \geq f(t,\beta_0(t))$;

($iiii$) $\alpha_0(a) \leq A \leq \beta_0(a)$ un $\alpha_0(b) \leq B \leq \beta_0(b)$.

L. Jackson un *K. Schrader* monotonās virknes konstruēja kā palīgrobežproblēmas atrisinājumus $\{x_n\}$, bet *V. Lakshmikantham* un *A. Vatsala* konstruēja apakšējo $\{\alpha_n\}$ un augšējo $\{\beta_n\}$ funkciju virknes.

4.1. teorēma. [81, Th. 3.2, 8. lpp.] *Pieņemsim, ka nosacījumi (i)-(iiii) izpildās. Tad V. Lakshmikantham – A. Vatsala un L. Jackson – K. Schrader virknes konverģē uz vienīgo robežproblēmas* $-u'' = f(t,u)$, $u(0) = A$, $u(1) = B$ *atrisinājumu, kuram piemīt īpašība (P).*[9]

[9]t.i., attiecīgais variāciju vienādojums ir neoscilējošs intervālā (a,b).

5. Piemēri

Aplūkosim diferenciālvienādojumu

$$x'' = x^3 - k^2 x, \qquad \text{kur} \quad k = \frac{5\pi}{2}, \tag{5.1}$$

ar dažādu veidu robežnosacījumiem

$$x(0) = 0, \quad x(1) = 0; \tag{5.2}$$

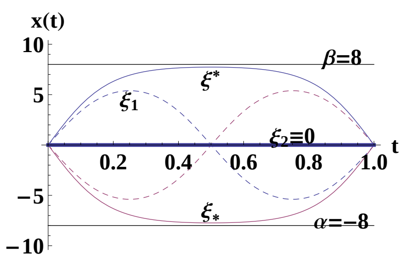
$$x'(0) = 0, \quad x'(1) = 0; \tag{5.3}$$

$$x'(0) = 0, \quad x(1) = 0. \tag{5.4}$$

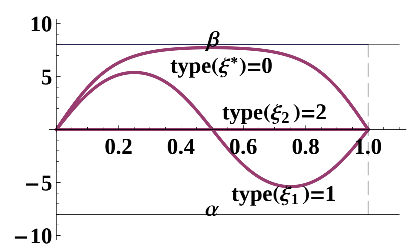
Robežproblēmai (5.1), (5.2) ([76], [77]) par augšējo un apakšējo funkciju var paņemt konstantes $\beta(t) \equiv 8$ un $\alpha(t) \equiv -8$. Šīs robežproblēmas atrisinājumi un tam atbilstošie tipi ir attēloti 5.1. un 5.2. zīmējumā.

Konstruēsim variāciju vienādojumu attiecībā pret atrisinājumu $\xi_2 \equiv 0$.

$$y''(t) = f_x(t, \xi(t))\,|_{\xi\equiv 0} \cdot y = (3\,\xi^2(t) - k^2)\,|_{\xi\equiv 0} \cdot y = -\left(\frac{5\pi}{2}\right)^2 y. \tag{5.5}$$



5.1. zīm. Robežproblēmas (5.1),(5.2) artisinājumi ([77])



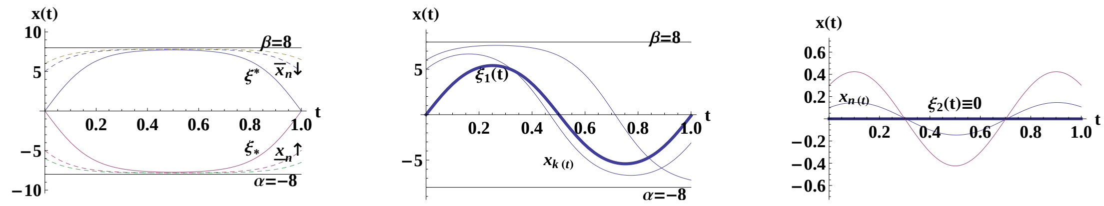
5.2. zīm. Robežproblēmas (5.1),(5.2) norādīto atrisinājumu tipi (ar simetrijas precizitāti) ([76])

Sākumproblēmas (5.5), $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ atrisinājumam ir divas nulles intervālā $(0, 1)$ un $y(1) \neq 0$. Tādējādi $type(\xi_2 \equiv 0) = 2$. Uz atrisinājumu $\xi_2(t)$ konverģē *taisnās* nemonotonas virknes elementi (skat. 5.3. zīm., c).

Taisnās monotonas virknes $\{\bar{x}_n\}$ un $\{\underline{x}_n\}$, kuri tiek konstruēti, ka palīgproblēmu[10] atrisinājumu virknes, konverģē uz 0-tipa atrisinājumu ξ^* un

[10] (5.1), $x(a) = \bar{A}_i \geq A$, $x(b) = \bar{B}_i \geq B$; (5.1), $x(a) = \underline{A}_i \leq A$, $x(b) = \underline{B}_i \leq B$

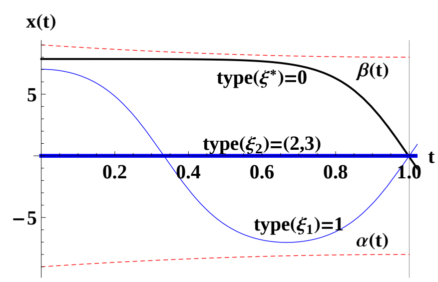
ξ_* (skat. 5.3. zīm., a). *Diagonālās* virknes elementi (skat. 5.3. zīm., b) konverģē uz robežproblēmas (5.1), (5.2) 1-tipa atrisinājumu $\xi_1(t)$.



(a) (b) (c)

5.3. zīm. Dažu konverģējošo apakšvirkņu elementi: $\underline{x}_n \to \xi_*$, $\bar{x}_n \to \xi^*$; $x_k \to \xi_1$; $x_n \to \xi_2$ ([77])

Robežproblēmai (5.1), (5.4) par augšējo un apakšējo funkciju var izmantot funkcijas $\beta(t) = 8 + (t-1)^2$ un $\alpha(t) = -8 - (t-1)^2$ ([80]). Līdzīgi, kā Dirihlē robežproblēmas gadījumā, varam klasificēt robežproblēmas atrisinājumu tipus (skat. 5.4. zīm.) un līdz ar to izvēlēties, ar kādām virknēm tuvināt tos.

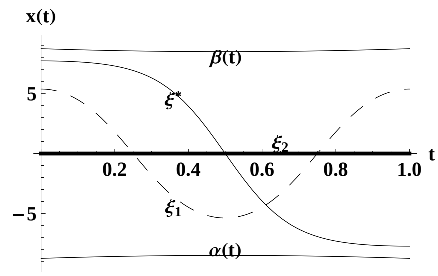


5.4. zīm. Problēmas (5.1), (5.4) atrisinājumu tipi ([80])

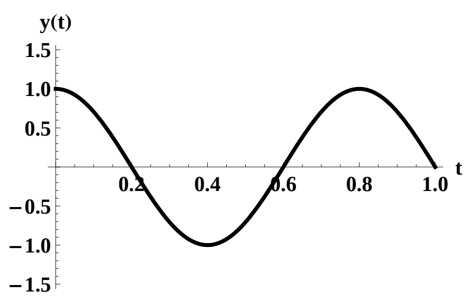
Neimana atrisinājumu tipu klasifikāciju ilustrēsim ar leņķiskās funkcijas palīdzību ([82]). Robežproblēmai (5.1), (5.3) par augšējo un apakšējo funkciju var izmantot funkcijas

$$\beta(t) = 8.5 + (t-0.5)^2 \quad \text{un} \quad \alpha(t) = -8.5 - (t-0.5)^2.$$

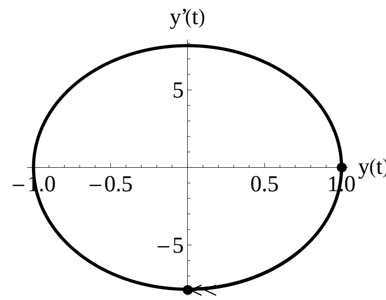
Aplūkosim katram robežproblēmas (5.1), (5.3) atrisinājumam (skat. 5.5 zīm.) atbisltošo variāciju vienādojuma atrisinājumu ar sākumnosacījumiem $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ un tā fāzes portretu.



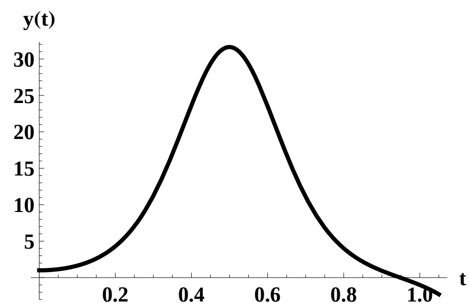
5.5. zīm. Robežproblēmas (5.1), (5.3) atrisinājumi (ar simetrijas precizitāti) ([82])



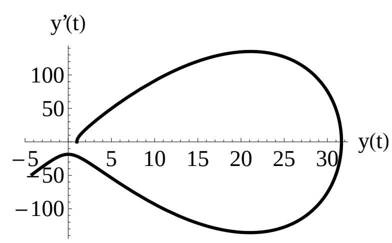
5.6. zīm. Variāciju vienādojuma attiecībā pret $\xi_2 \equiv 0$ artisinājums $y_2(t)$



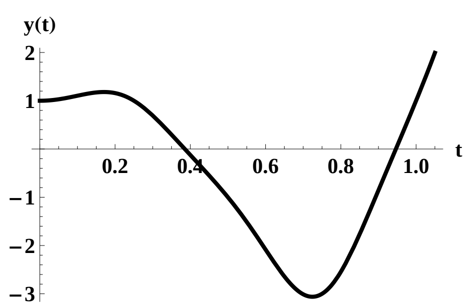
5.7. zīm. $y_2(t)$ fāzes portrets



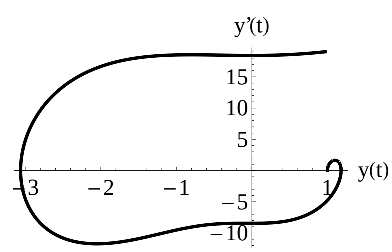
5.8. zīm. Variāciju vienādojuma attiecībā pret $\xi^*(t)$ artisinājums $y^*(t)$



5.9. zīm. $y^*(t)$ fāzes portrets



5.10. zīm. Variāciju vienādojuma attiecībā pret $\xi_1(t)$ artisinājums $y_1(t)$



5.11. zīm. $y_1(t)$ fāzes portrets

5.9. zīmējumā ir redzams, ka $0 < \Theta(1) < \frac{3}{2}\pi$, kas atbilst robežproblēmas (5.1), (5.3) 0-tipa atrisinājumam. 1-tipa atrisinājumam atbilst 5.11. zīmējumā attēlota trajektorija un $\frac{3}{2}\pi < \Theta(1) < \frac{5}{2}\pi$. 2-tipa atrisinājumu raksturo $\frac{5}{2}\pi < \Theta(1) < \frac{7}{2}\pi$, kas ir redzams 5.7. zīmējumā. Par konverğējošo virkņu izvēli var spriest pēc [82] aplūkotās teorēmas.

6. Secinājumi

Promocijas darba gaitā tika iegūti kvalitatīvie rezultāti Dirihlē, Neimana un jauktā tipa robežproblēmām, kurām eksistē augšējās un apakšējās funkcijas:

- robežproblēmas atrisinājumu tipi tika definēti ar attiecīgo variāciju vienādojumu palīdzību vai ar leņķiskās funkcijas palīdzību;
- 0-tipa atrisinājumus var tuvināt ar palīgrobežproblēmu atrisinājumu monotono virkņu palīdzību;
- i- tipa ($i \neq 0$) atrisinājumu nevar tuvināt ar monotono virkņu palīdzību;
- i- tipa ($i \neq 0$) robežproblēmu atrisinājumus var tuvināt ar atbilstošām taisnām vai diagonālām virknēm;
- palīgrobežproblēmām var būt vairāki atrisinājumi, tie veido dažādas virknes, kuras satur apakšvirknes, konverģējošas uz dotās robežproblēmas dažādu tipu atrisinājumiem;
- robežproblēmas i-tipa atrisinājumus var tuvināt ar palīgrobežproblēmu līdzīga tipa atrisinājumiem;
- *L. Jackson – K. Schrader* metode sniedz atrisinājumu monotono virkni, kuriem piemīt īpašība (P), t.i., attiecīgais variāciju vienādojums ir neoscilējošs;
- pielietojot *V. Lakshmikantham - A. Vatsala* metodi "ieliektajam-izliektajam" vienādojumam var konstruēt monotono virkni, kura konverģē uz vienīgo atrisinājumu, tajā pašā laikā var pielietot *L. Jackson – K. Schrader* metodi, tādējādi vienīgajam problēmas atrisinājumam piemīt īpašība (P).

Iegūtos rezultātus var pielietot robežproblēmu atrisinājumu tuvināšanai un atrisinājumu skaita novērtēšanai. Turklāt, mūsu pētījumi cenšas novērst trūkumus, kuri ir saistīti ar robežproblēmu atrisinājumu iekšējām īpašībām.

LITERATŪRA

[1] P. Bailey, L. Shampine, P. Waltman. *Nonlinear two point boundary value problems.* New York and London. Academic Press, 1968.–171 pp.

[2] S.R. Bernfeld, V. Lakshmikantham. *An introduction to nonlinear boundary value problems*, Academic Press, 1974.–386 pp.

[3] C. de Coster, P. Habets. *Two-point boundary value problems: lower and upper solutions.* vol. 205 of Mathematics in Science and Engineering, Elsevier, Amsterdam, The Netherlands, 2006.–489 pp.

[4] P. Hartman. *Ordinary differential equations.* Wiley and Sons, Inc., New York, 1964.-612 pp.

[5] W. Kelley and A. Peterson *The theory of differential equations: classical and qualitative.* Prentice Hall, 2003.–413 pp.

[6] G. Ladde, V. Lakshmikantham, A. Vatsala. *Monotone iterative techniques for nonlinear differential equations*, in: Monographs, Advanced Texts and Surveys in Pure and Applied Mathematics, Vol. 27, Wiley, New York, Pitman, 1985.–236 pp.

[7] V. Lakshmikantham, S. Heikkilä. *Monotone iterative techniques for discontinuous nonlinear differential equations.* New York, Basel, Hong Kong, Dekker, 1994.–514 pp.

[8] V. Lakshmikantham, S. Köksal. *Monotone flows and rapid convergence for nonlinear partial differential equations.* London and New York, Taylor & Francis Group, 2003.–318 pp.

[9] V. Lakshmikantham, A. Vatsala. *Generalized quasilinearization for nonlinear problems.* Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1998.–279 pp.

[10] E. Picard. *Leçons sur quelques problèmes aux limites de la thèorie des èquations diff èrentielles.* – Paris, 1930.

[11] Н.И. Васильев, Ю.А. Клоков. *Основы теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений.* Р. - Звайгзне, 1978.–180 с.

[12] Б.П. Демидович, И.А. Марон и Э.З. Шувалова. *Численные методы анализа.* М.: Наука, 1967.–368 с.

[13] Ф.И. Егоров. *Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями.* М.: - ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 384 с.

[14] И.Г. Петровский. *Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.* - М.: МГУ, 1984.–295 с.

[15] В.И. Смирнов. *Курс высшей математики,* том 2. М.: Наука, 1974.–656 с.

[16] Ф. Трикоми. *Дифференциальные уравнения.* М.: Из-во иностранной литературы. 1962.–351 с.

[17] М.В. Федорюк. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* М.: Наука. 1980.–351 с.

[18] Л.Э. Эльсгольц. *Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление.* М.: Наука. 1969.–424 с.

[19] I. Jermačenko. *Kvazilinearizācija un nelineāro robežproblēmu atrisinājumu tipi.* Promocijas darbs. Daugavpils, DU, 2007.

[20] B. Ahmad, U. Naz and R.A. Khan. *A higner order monotone iterative scheme for nonlinear Neumann boundary value problems.* Bull. Korean Math. Soc. **42** (1) (2005), 17–22.

[21] B. Ahmad, A. Al–Saedi and S. Sivasundaram. *Approximation of the solution of nonlinear second order integro-differential equations.* Dynamic System Appl. **14** (2005), 253–263.

[22] B. Ahmad, J.J. Nieto and N. Shahzad. *The Bellman–Kalaba–Lakshmikantham quasilinearization method for Neumann problems.* J. Math. Anal. Appl. **257** (2001), 356–363.

[23] A. Alsaedi. *Monotone iteration scheme for a forced Duffing equation with nonlocal three-point conditions.* Commun. Korean Math. Soc. **22** (2007), 53–64.

[24] H. Amann. *Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach Spaces.* SIAM **18** (1976), 620–709.

[25] S.R. Bernfeld and J. Chandra. *Minimal and maximal solutions of nonlinear boundary value problems.* Pacific J. Math. **71** (1977), 13–20.

[26] S.R. Bernfeld and V. Lakshmikantham. *Linear monotone method for nonlinear boundary value problems in Banach spaces*, Rocky Mountain J. Math.**12** (1982), 807–815.

[27] A. Cabada. *The method of lower and upper solutions for second, third, fourth and higher order boundary value problems.* J. of Math. Anal. and Aplic. **185**, 302–320 (1994).

[28] A. Cabada and J.J. Nieto. *A generalized upper and lower solutions method for nonlinear second order ordinary differential equations.* J. Appl. Math. Stochastic Anal. **5** (1992), 157–166.

[29] A. Cabada, J.J. Nieto. *A generalization of the monotone iterative technique for nonlinear second order periodic boundary value problems.* J. Math. Analysis and Applications **151** (1999), 181–189.

[30] A. Cabada, R.L. Pouso. *Existence results for the problem $(\phi(u'))' = f(t,u,u')$ with nonlinear boundary conditions.* Nonlinear Anal. **35** (1998), 221–231.

[31] A. Cabada, R.L. Pouso. *Extremal solutions of strongly nonlinear discontinuous second-order equations with nonlinear functional boundary conditions.* Nonlinear Anal. **42** (2000), 1377–1396.

[32] M. Cherpion, C. de Coster, P. Habets. *Monotone iterative methods for boundary value problems.* Diff. Int. Eqns. **12** (1999), 309–338.

[33] M. Cherpion, C. de Coster and P. Habets. *A constructive monotone iterative method for second order BVP in presence of lower and upper solutions.* Applied Math. and Comp. **123** (2001), 75–91.

[34] C. de Coster and P. Habets. *An overview of the method of lower and upper solutions for ODEs.* Nonlinear Analysis and Its Applications to Differential Equations, vol. **43** (2001) of Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., Birkhäuser, Boston, Mass, USA, 3–22.

[35] C. de Coster and P. Habets. *The lower and upper solutions method for boundary value problems.* Handbook of Differential Equations, Elsevier/North-Holland, Amsterdam, The Netherlands, 69–160 (2004).

[36] L.H. Erbe. *Nonlinear boundary value problems for second order differential equations.* J. Diff. Equations **7** (1970), 459–472.

[37] L.H. Erbe. *Existence of solutions to boundary value problems for second order differential equations.* Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, **6** (11) (1982), 1155—1162.

[38] M. Grammatikopoulos and P. Kelevedjiev. *Minimal and maximal solutions for two-point boundary-value problems.* El. J. of Diff. Equations. **21** (2003), 1—14. `URL:http://ejde.math.swt.eduorhttp://ejde.math.unt.edu`

[39] P. Habets and R. Pouso. *Examples of the nonexistence of a solution in the presence of upper and lower solutions.* ANZIAM J. **44** (2003), 591–594.

[40] J.W. Heidel. *A second order ordinary nonlinear boundary value problems.* J. Math. Anal. Appl. **48** (1974), 493–503.

[41] L.K. Jackson and K.W. Schrader. *Comparison theorems for nonlinear differential equations.* J. Diff. Equations **3** (1967), 248–255.

[42] L. Kantorovich. *The method of successive approximations for functional equations.* Acta Math. **71** (1939), 63–97.

[43] M. Khavanin and V. Lakshmikantham. *The method of monotony and second order boundary value problems.* J. Math. Anal. Appl. **120** (1986), 737–744.

[44] H.W. Knobloch. *Comparison theorems for nonlinear second order differential equations.* J. Diff. Equations **1** (1965), 1–26.

[45] H.W. Knobloch. *Second order differential inequalities and nonlinear boundary value problem.* J. Diff. Equations **4** (1969), 55–71.

[46] P. Korman. *Monotone approximation of unstable solutions.* J. of Computational and Applied Math. **136** (2001), 309–315.

[47] A. Lepin *Monotone iterations for systems.* Proceedings of IMCS of University of Latvia, **12** (2012), 10–21. (Russian)

[48] M. Nagumo. *Über die differentialgleichung* $y'' = f(t, y, y')$. Proc. Phys-Math. Soc. Japan **19** (1937), 861—866.

[49] M. Nagumo. *On principally linear elliptic differential equations of the second order*. Osaka Math. J. **6** (1954), 207—229.

[50] J. Nieto. *Generalized quasilinearization method for second order ordinary differential equation with Dirichlet boundary conditions.* Proc.of the Amer. Math. Society, Volume 125, Nr. **9** (1997), 2599–2604.

[51] W.T. Reid. *Comparison theorems for non-linear vector differential equations.* J. Diff. Equations **5** (1969), 324–337.

[52] A. Rontó, M. Rontó, G. Holubová and P. Nečesal. *Numerical-analytic technique for investigation of solutions of some nonlinear equations with Dirichlet conditions.* El. J. Boundary Value Problems 2011, **1** (2011). http://www.boundaryvalueproblems.com/content/2011/1/58

[53] F. Sadyrbaev. *Nonlinear boundary value problems of the calculus of variations.* Proceedings of the 4^{th} International Conference on Dynamical Syst. and Diff. Equations, 760–770 (2002).

[54] H.B. Thompson. *Second order ordinary differential equations with fully nonlinear two point boundary conditions.* Pacific J. of Math. **172** (1) (1996), 255–277.

[55] I. Yermachenko and F. Sadyrbaev. *Types of solutions of the second order Neumann problem: multiple solutions.* Proceedings of IMCS of University of Latvia, **4** (2004), 5–21.

[56] I. Yermachenko and F. Sadyrbaev. *Quasilinearization and multiple solutions of the Emden-Fowler type equation.* Mathematical Modelling and Analysis **10** (1) (2005), 41–50.

[57] I. Yermachenko and F. Sadyrbaev. *Multiple solutions for F-Laplacian equations with the Dirichlet boundary conditions.* Proceedings of IMCS of University of Latvia, **7** (2007), 103–119.

[58] M. Dobkeviča. *Nemonotonas iteratīvas shēmas.* DU 50. Starptautiskās zinātniskās konferences tēzes (2008), 41. lpp. http://dukonference.lv/public/proceedings_of_conf/98789791.pdf

[59] M. Dobkeviča. *Nemonotono tuvinājumu konstruēšana robežproblēmas atrisināšanai.* DU 51. Starptautiskās zinātniskās konferences tēzes (2009), 12. lpp. http://dukonference.lv/public/proceedings_of_conf/Tezes_51.pdf

[60] M. Dobkeviča. *Par diferenciālvienādojumu atrisinājumu tuvinājumiem.* DU 52. Starptautiskās zinātniskās konferences tēzes (2010), 73. lpp. http://dukonference.lv/public/proceedings_of_conf/Tezes.pdf

[61] M. Dobkeviča. *Nelineāro robežproblēmu atrisinājumi. Skaitlisko eksperimentu rezultāti.* DU 53. Starptautiskās zinātniskās konferences tēzes (2011), 192. lpp.

`http://dukonference.lv/public/proceedings_of_conf/Tezes_53_all.pdf`

[62] M. Dobkeviča. *Dažas parasto diferenciālvienādojumu atrisinājumu īpašības.* DU 54. Starptautiskās zinātniskās konferences tēzes (2012), 193. lpp.

[63] M. Dobkevich. *On construction of converging sequences to solutions of BVP.* 14^{th} International Conference Mathematical Modelling and Analysis, Abstracts (2009), Daugavpils, Latvia, p. 24.

[64] M. Dobkevich. *Nonmonotone convergence schemes.* 16^{th} International Conference Mathematical Modelling and Analysis, Abstracts (2011), Sigulda, Latvia, p. 37.

[65] M. Dobkevich. *Iterations to solutions of "concave - convex" BVP.* 17^{th} International Conference Mathematical Modelling and Analysis, Abstracts (2012), Tallinn, Estonia, p. 37.

[66] M. Dobkevich. *The structure of a set of solutions of two-point BVP between lower and upper functions.* 16^{th} International Conference on Difference Equations and Applications, Abstracts (2010), Riga, Latvia, 18 p.

[67] M. Dobkevich. *Non-monotone approximation schemes for solutions of boundary value problems for ODE*, 8^{th} AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, Abstracts (2010), Drezden, Germany, p. 293.

[68] M. Dobkevich. *On non-monotone iteration schemes.* 8^{th} Latvian Mathematical conference, Abstracts (2010), Valmiera, Latvia, p. 26.

[69] M. Dobkeviča. *Par robežproblēmu atrisinājumu tuvinājumiem.* 9. Latvijas matemātikas konference, Tēzes (2012), Jelgava, Latvia, 23. lpp.

[70] M. Dobkevich. *On non-monotone approximation schemes for solutions of the second order differential equations.* 7^{th} European Conference on Elliptic and Parabolic Problems, Abstracts (2012), Gaeta, Italy, p. 36. http://www.math.uzh.ch/fileadmin/math/events/2012/247/20446_all_abstracts.pdf

[71] M. Dobkeviča. *Par divpunktu robežproblēmu atrisinājumu tuvinājumiem.* DU 55. Starptautiskās zinātniskās konferences tēzes (2013), 66. lpp. http://www.dukonference.lv/files/proceedings_of_conf/Tezes_2013.pdf

[72] M. Dobkevich. *Multiplicity of solutions of BVP and properties of equations of variation.* 18^{th} International Conference Mathematical Modelling and Analysis, Abstracts (2013), Tartu, Estonia, p. 28. http://www.ut.ee/mma-amoe2013/nmd3/abstraktid09876/Dobkevich.pdf

[73] M. Dobkevich and F. Sadyrbaev. *On different type solutions of the Dirichlet BVP.* 10^{th} Latvian Mathematical Conference, Abstracts (2014), Liepaja, Latvia, p. 32.

[74] M. Dobkevich and F. Sadyrbaev. *On different type solutions of the boundary value problems.* 19^{th} International Conference Mathematical Modelling and Analysis, Abstracts (2014), Druskininkai, Lithunia, p. 16.

[75] M. Dobkevich. *Non-monotone iteration.* Proceedings of IMCS of University of Latvia, **8** (2008), 59–71.

[76] M. Dobkevich and F. Sadyrbaev. *Types of solutions and approximation of solutions of second order nonlinear boundary value problems.* Proceedings of ICNAAM. Amer. Inst. Phys. Publ., **1168** (1) (2009), 260–263.

[77] M. Dobkevich. *On construction of converging sequences to solutions of boundary value problems.* Mathematical Modelling and Analysis **15** (2) (2010), 189–197.

[78] M. Dobkevich. *Non-monotone approximations schemes for solutions of BVP for ODE.* Proceedings of IMCS of University of Latvia, **11** (2011), 83–89.

[79] M. Dobkevich. *Non-monotone convergence schemes.* Mathematical Modelling and Analysis **17** (4) (2012), 589–597.

[80] M. Dobkevich. *On non-monotone approximation schemes for solutions of the second order differential equations.* Differential and Integral Equations **26** (9/10) (2013), 1169–1178.
http://projecteuclid.org/euclid.die/1372858570

[81] M. Dobkevich. *Iterations to solutions of "concave - convex" BVPs.* Proceedings of IMCS of University of Latvia, **13** (2013), 5–11.

[82] M. Dobkevich and F. Sadyrbaev. *Approximation schemes and types of solutions for the Neumann BVP.* Proceedings of IMCS of University of Latvia, **13** (2013), 12–23.